# Bioseñales I

## Análisis de estructuras Biomédicas I

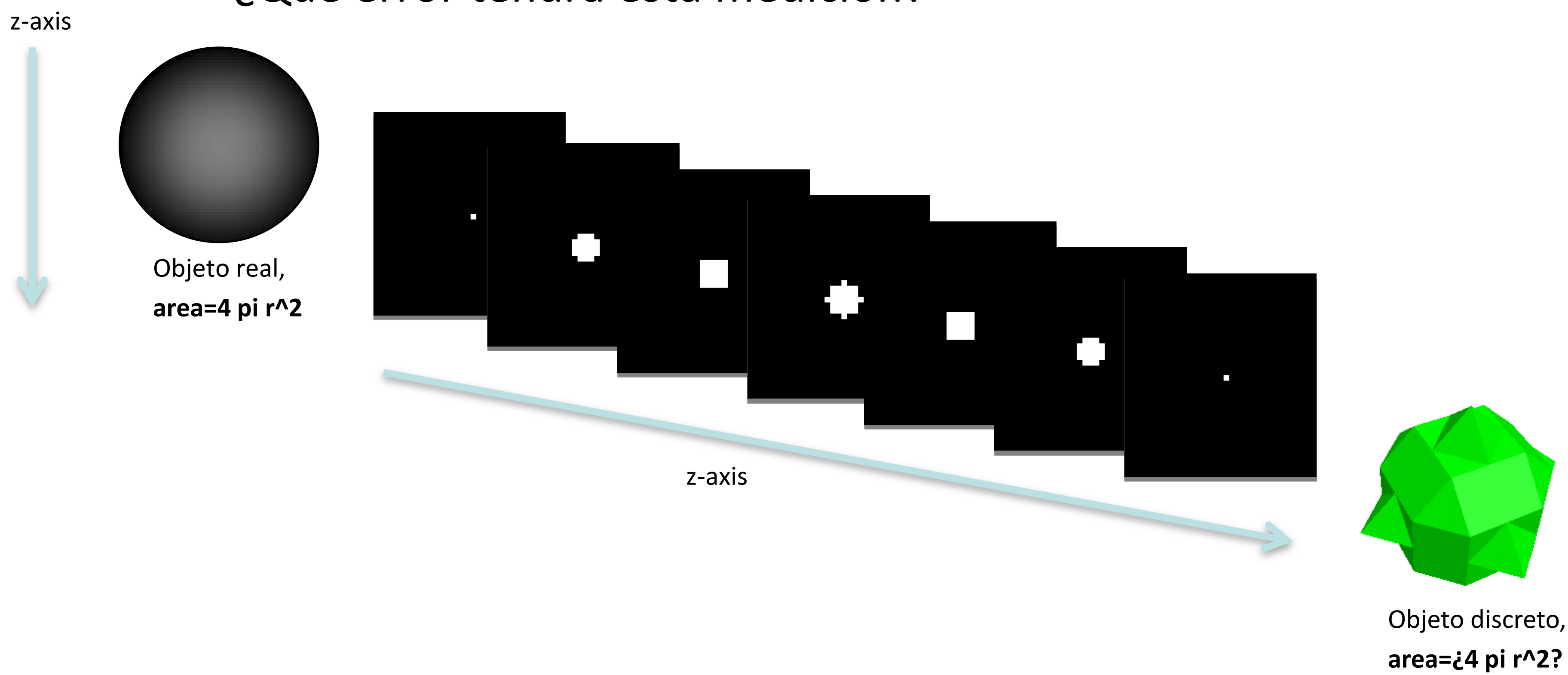
## Forma & Topología

Mauricio Cerda

# Motivación

Luego de realizar la segmentación (automática o manual):

- ¿Cómo caracterizar 1 objeto o diferenciar 2 (o más) objetos?
- ¿Cómo cuantificar en imágenes discretas?
- ¿Qué error tendrá esta medición?



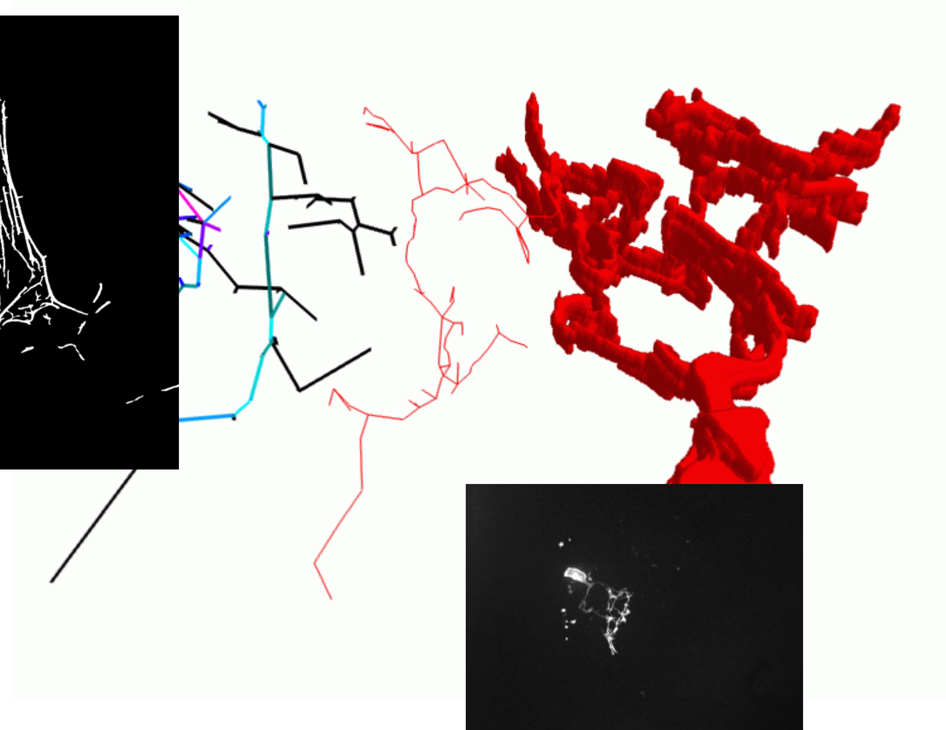
# Motivación

En esta sesión estudiaremos los principales parámetros para cuantificar un ROI (binario).

**Ej. 1**. Análisis de forma y fibras de actina en cultivos de fibroblastos.

Imágen original (2D), Prof. Lisette Leyton

**Ej. 1**. Neurona del organo parapineal en pez zebra.



Imágen original y segmentación (3D), Karina Palma y colaboradores.

# Resumen

1. Descriptores geométricos: ubicación, perímetro, area, volumen, curvatura.
2. Momentos de morfología (orden 0-2).
3. Descriptores compuestos.
4. Descriptores de grupos de objetos.
5. Topología en computación (skeletons).

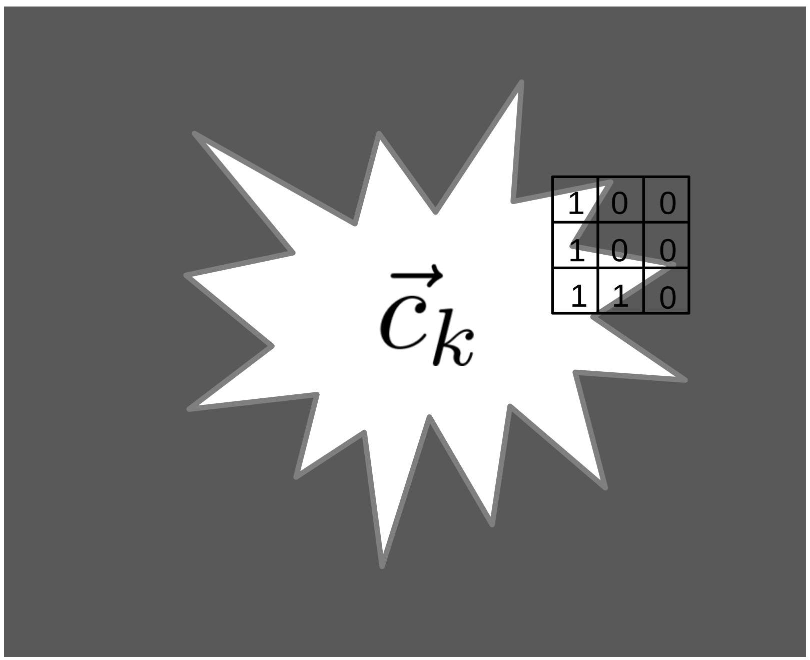
# Resumen

1. Descriptores geométricos: ubicación, perímetro, area, volumen, curvatura.
2. Momentos de morfología (orden 0-2).
3. Descriptores compuestos.
4. Descriptores de grupos de objetos.
5. Topología en computación (skeletons).
6. Texturas

# Definiciones



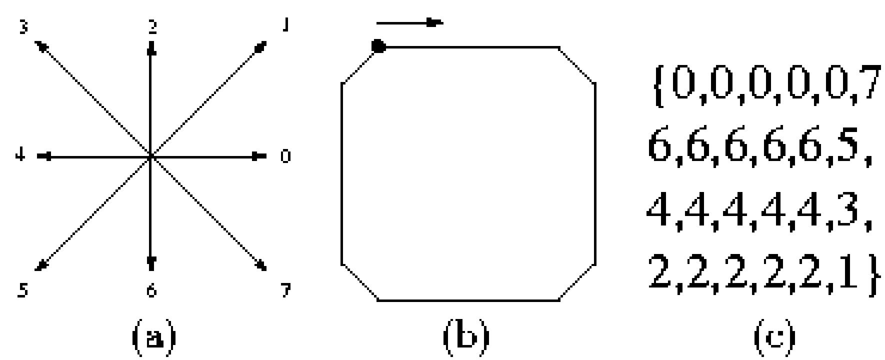
Definición de un ROI (binario) en una imágen/stack y su representación “chain code”.




**Definiciones:**

- Imagen Binaria $I(x,y) \in \{0,1\}$
- Coordenadas del ROI $\vec{c}_k = (x,y)$
- Entonces $I(\vec{c}_k) = 1$

- Alternativa, chain code:

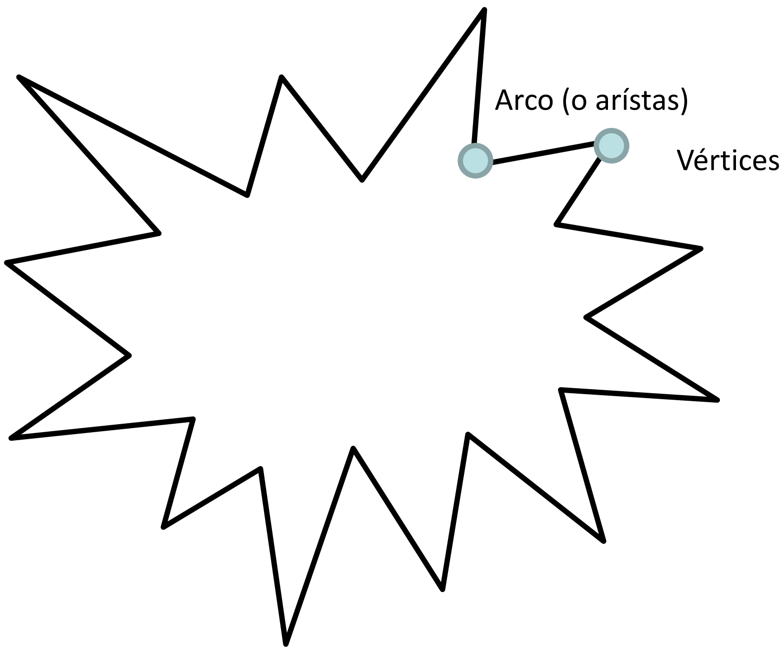


# Definiciones



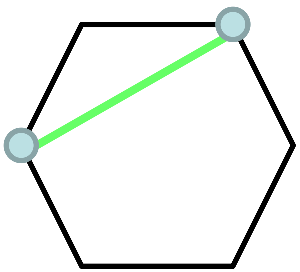
Otra representaciones:

- Polígono (2D)=vertices y arcos
- Superficie (3D)=caras

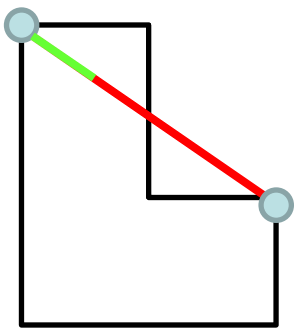



Clasificación:

- Si la línea entre dos puntos siempre pertenece al conjunto.



Polígono convexo



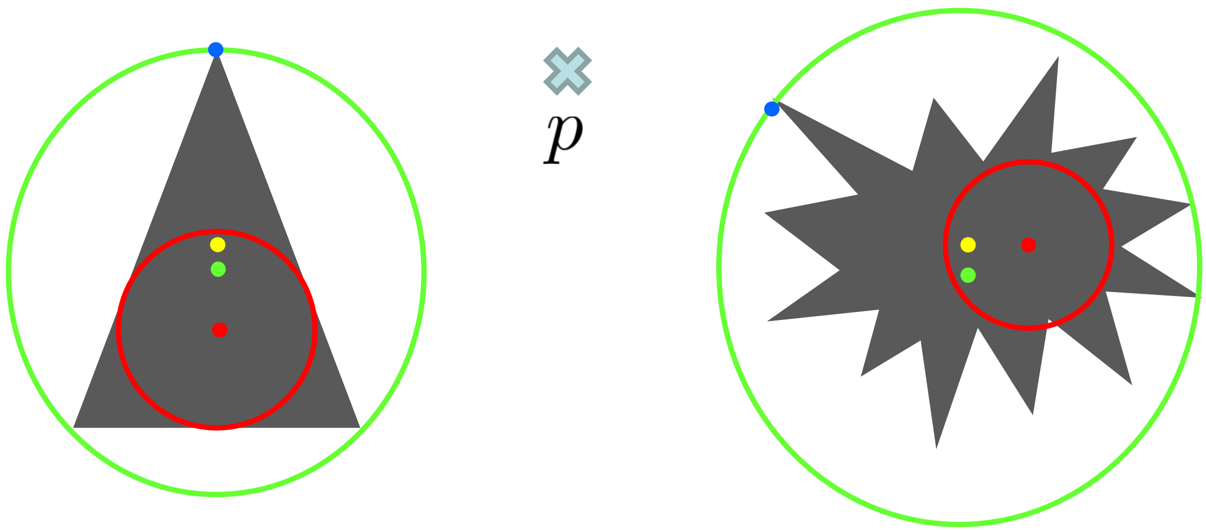
Polígono no-convexo

# Descriptores Geométricos: Ubicación



Dado un ROI binario, existen varias definiciones de su ubicación:

- Punto más cercano (■) $\vec{c}_p = argmin_{\vec{c}_p}\{|\vec{p} - \vec{c}_p|\}$
- Centro de masa/baricentro (■) $\vec{c}_m = \frac{\sum \vec{c}_k}{n}$
- Incentro (■) $c_i$
- Circuncentro (■) $c_o$



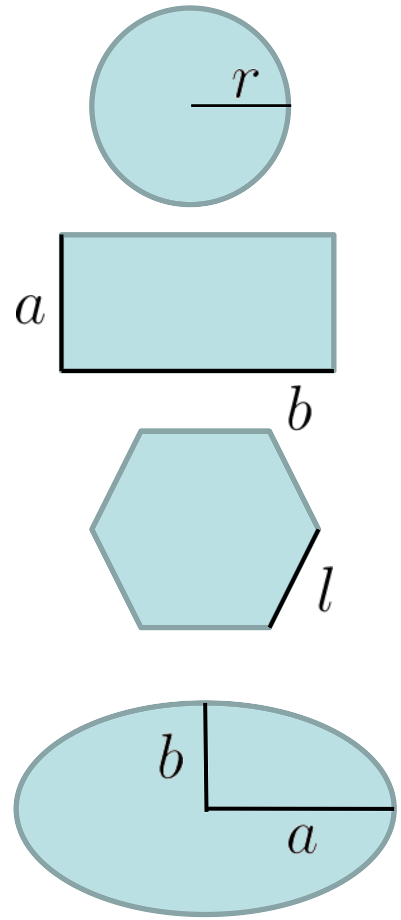

Polígono convexo (3)

Polígono no convexo (3)

# Descriptores Geométricos: Perímetro

El perímetro es el largo de contorno de un ROI en 2D. Para figuras simples es:

- Círculo — $2\pi r$
- Rectángulo — $2(a+b)$
- Polígono regular de n caras de largo l — $nl$
- Elipse...



# Descriptores Geométricos: Perímetro

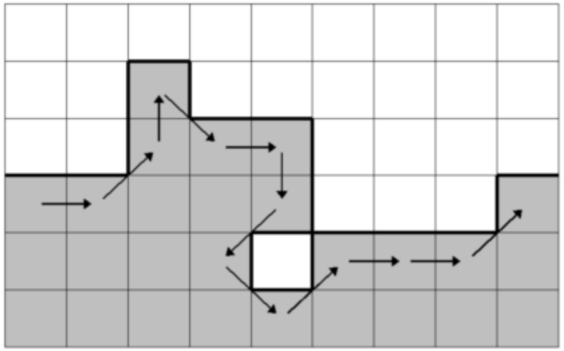


El perímetro se puede medir directamente en un ROI binario o el polígono que lo representa, ¿cuál elegir?

- Usando "chain code" cuento pixeles,

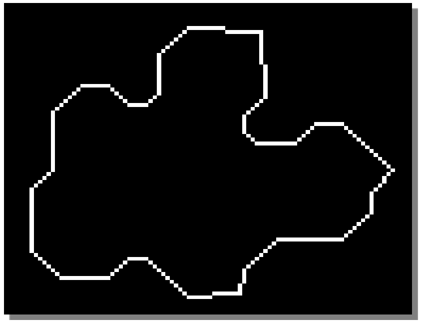
Cada "flecha" suma 1

- ¿Qué mejora se puede realizar?



- Usando representación poligonal

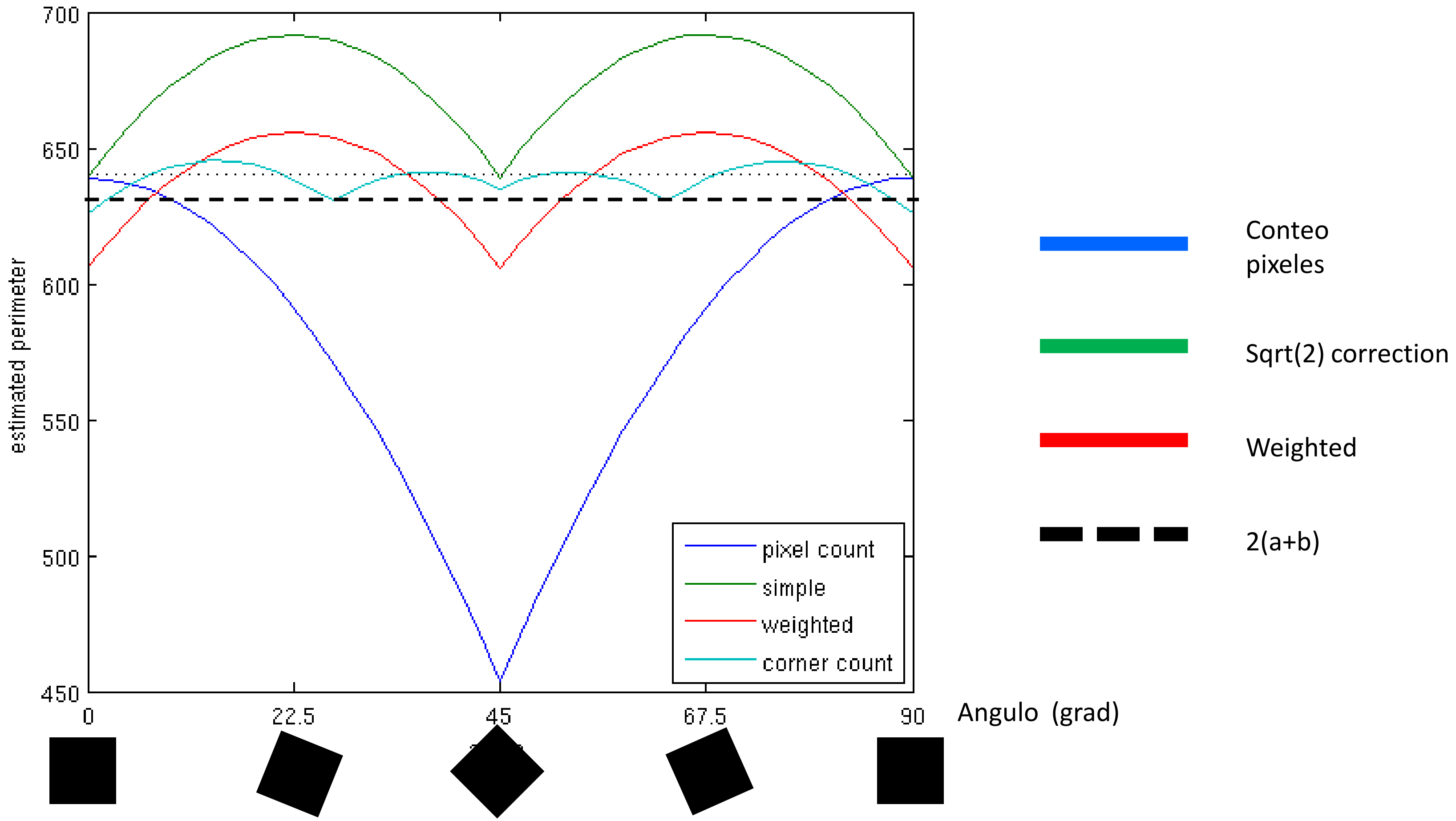
(ej. contornos activos), suma de segmentos de recta



# Descriptores Geométricos: Perímetro

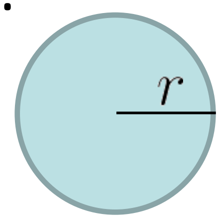
En general el perímetro se puede medir directamente en un ROI binario o el polígono que lo representa, ¿cuál elegir?

Perímetro de un cuadrado



El area describe la superficie de un objeto 2D. Existen formulas conocidas en geometrías simples:

- Circulo

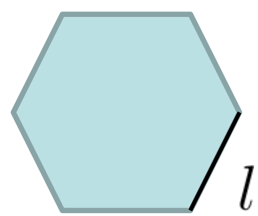



$$\pi r^2$$

- Rectangulo

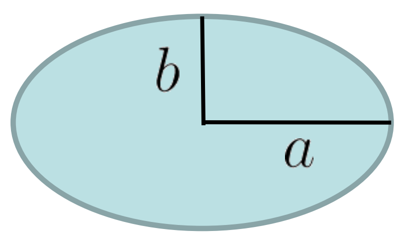

$$ab$$

- Polígono regular de n caras de largo l



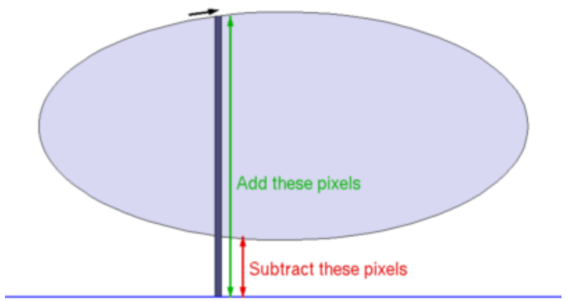

$$n\frac{l^2}{4}\tan\left(\frac{\pi(n-2)}{2n}\right)$$

- Elipse



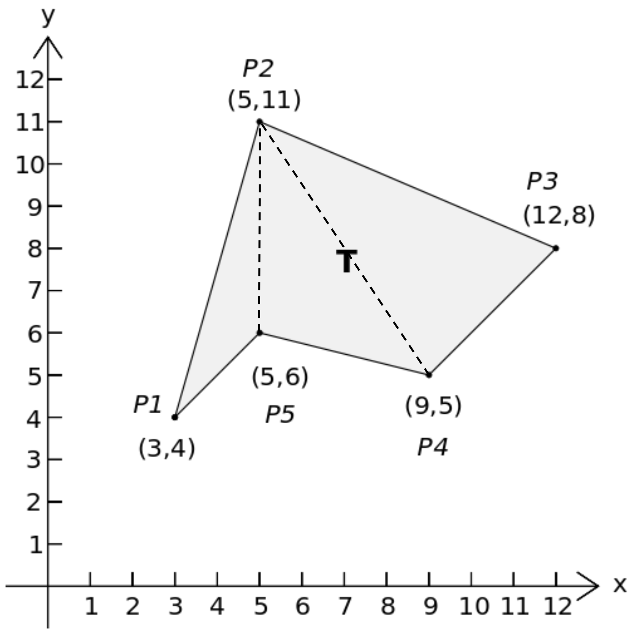

$$\pi ab$$

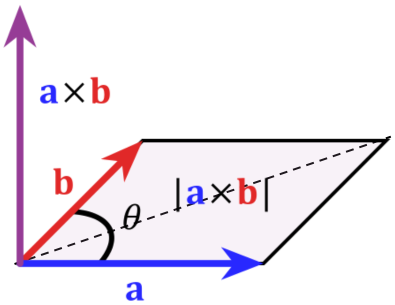
El area (2D) se puede medir directamente en un ROI binario o el polígono que lo representa, ¿cuál elegir?




- Usando ROI binario
  - Sumar todo el ROI
  - Usar chain code con una línea extra

- Usando representación del contorno
  - Usando el algoritmo de shoelace.

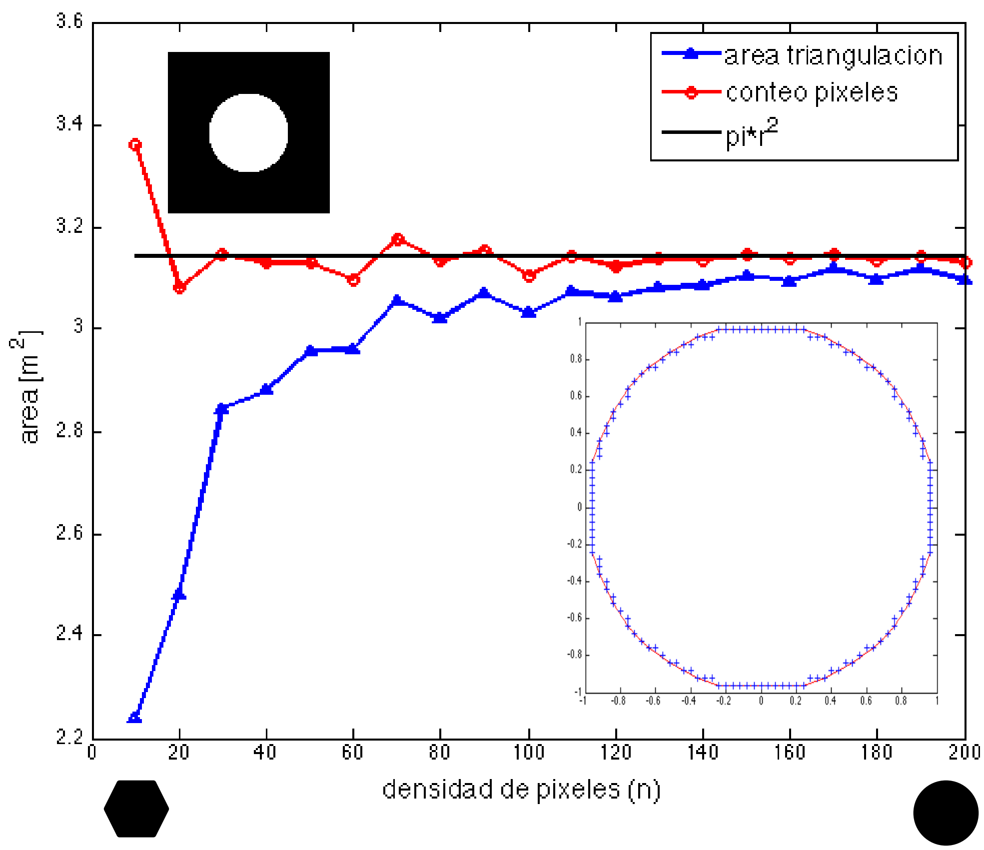


# Descriptores Geométricos: Area



En general el area (2D) se puede medir directamente en un ROI binario o el polígono que lo representa, ¿qué metodo elegir?



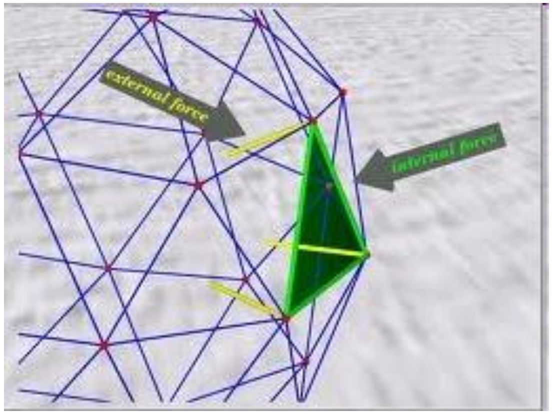
En 3D también se puede medir la superficie de un ROI binario o el polígono que lo representa, ¿cuál elegir?

- Usando ROI Binario, contar

cada voxel del contorno

- Representación de superficie

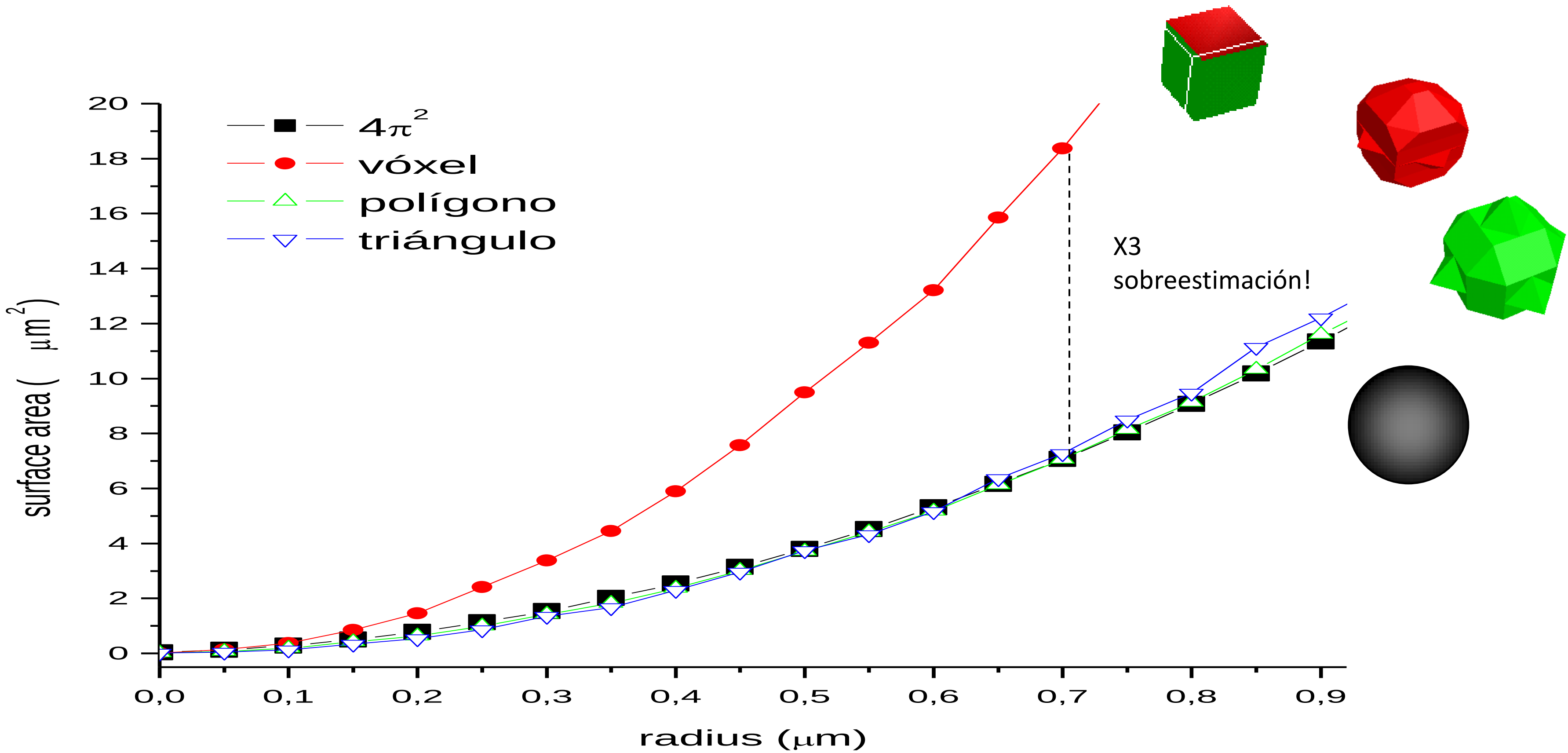
Medir el area de cada triangulo



# Descriptores Geométricos: Area



En 3D también se puede medir la superficie de un ROI binario o el polígono que lo representa, ¿cuál elegir?



# Descriptores Geométricos: Volumen

El volume describe la el tamaño de un objeto 3D. Existen formulas conocidas en geometrías simples:

- Esfera  $\frac{4}{3}\pi r^3$

- Elipsoide  $\frac{4}{3}\pi abc$

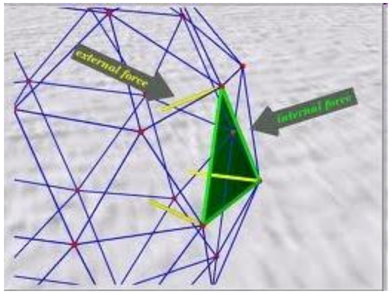
- Paralelepipedo  $abc$

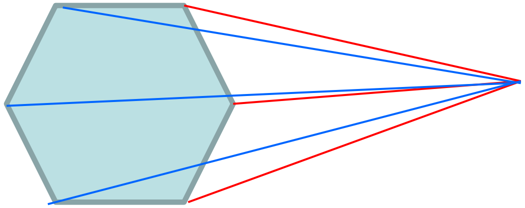
# Descriptores Geométricos: Volumen

En general el volumen (3D) se puede medir directamente en un ROI binario o el polígono que lo representa, ¿cuál elegir?

- Usando ROI Binario, contar cada voxel del ROI

- Representación de contorno, sumar El volumen con signo del tetrahedro de cada triangulo y un punto cualquiera.

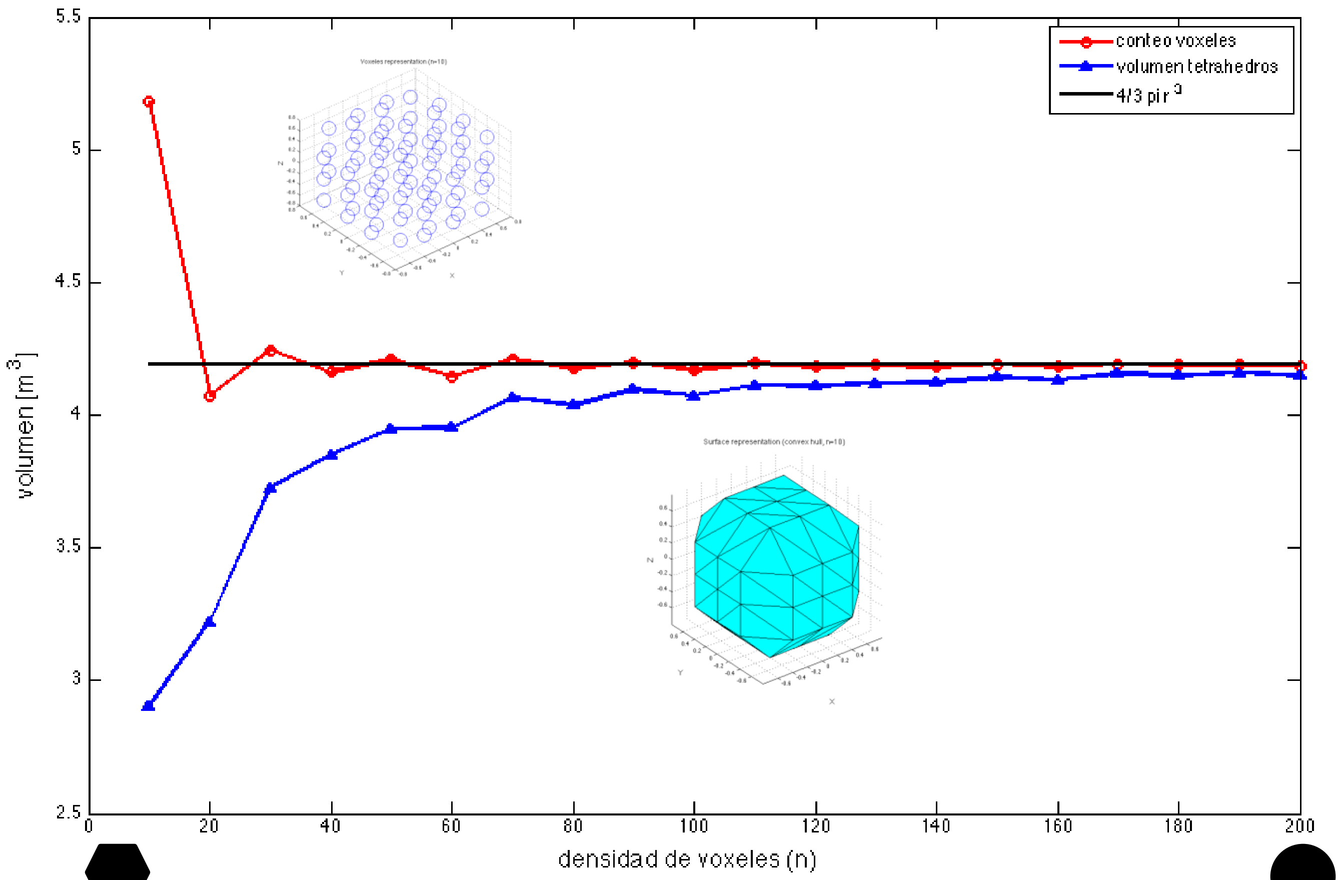




# Descriptores Geométricos: Volumen



En general el volumen (3D) se puede medir directamente en un ROI binario o el polígono que lo representa, ¿cuál elegir?

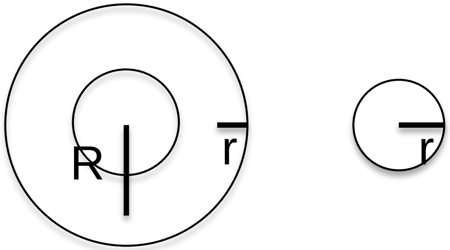


# Descriptores Geométricos: Discusión

- Hay un compromiso entre algoritmos:
  - Simples, rápidos, poco preciso
  - Más complejos, más pesados, más precisos
  - Al medir perímetro (2D) /curvatura (2D) / area (3D) las representaciones geométricas son mas precisas.
  - Al medir area (2D) / volumen el conteo de pixeles es preciso.

# Ejercicios

1.- Calcule el area y el volumen (3D) de la siguiente figura:




2.- A partir de un polígono  de n vertices cualquiera, se puede construir un polígono convexo con sus vértices, proponga paso a paso como podría calcularlo (gráficamente).¿Cuántos pasos requiere su algoritmo?

# Resumen

1. Descriptores geométricos: ubicación, perímetro, area, volumen, curvatura.
2. Momentos de morfología (orden 0-2).
3. Descriptores compuestos.
4. Descriptores de grupos de objetos.
5. Topología en computación (skeletons).
6. Complejidad y el camino más corto.

# Momento de morfología

Ubicación, perímetro, area y volumen describen parcialmente un objeto, pero no caracterizan su forma.

Imágen original (2D),
Prof. Lisette Leyton

¿Como cuantificar que tan alargado es un objeto?

# Momento de morfología

Un ROI también se puede analizar como una “distribución” cuyos momentos describen sus características.

En 1 dimensión el momento estadísticos de orden p es:

$$m_p = \sum x^p \rho(x)$$

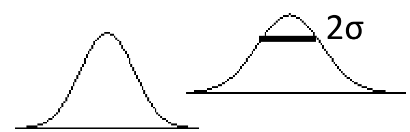
$$\rho(x) = 1$$

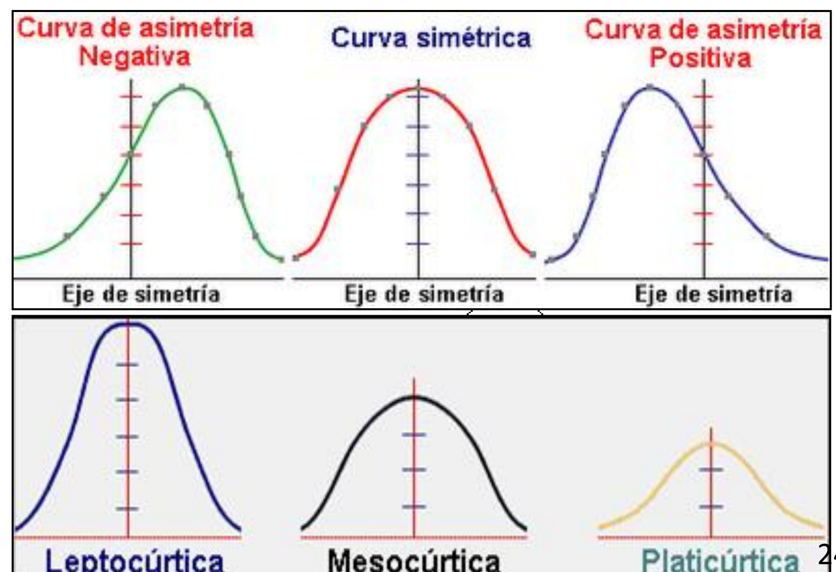
$$\mu_p = \sum (x - \overline{x})^p \rho(x)$$

p= 2
Medición de
**Disperción**

p= 3
Medición de
**Asimetría**

p= 4
Medición de
**Curtosis**



# Momentos de morfología

En 2D también se pueden definir “momentos” de morfología:

$$m_{p,q} = \sum x^p y^q I(x,y) \qquad \mu_{p,q} = \sum (x-\overline{x})^p (y-\overline{y})^q I(x,y)$$

Momento centrado de orden p

El momento de orden cero:

$$m_{0,0} = \sum I(x,y)$$

$$area = m_{0,0}$$

Los momentos de orden uno:

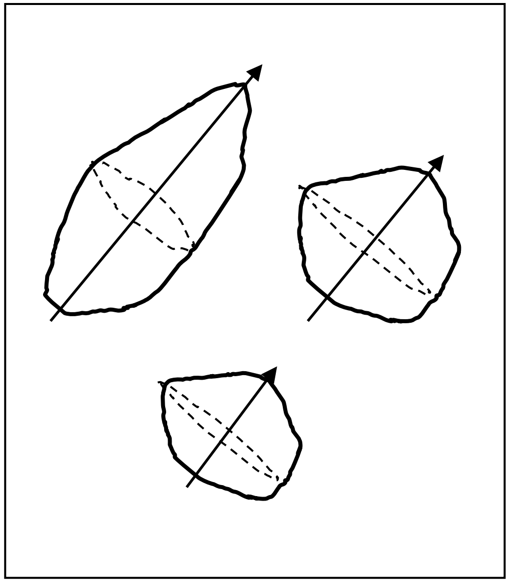
$$m_{1,0} = \sum xI(x,y)$$
$$m_{0,1} = \sum yI(x,y)$$

$$\vec{c}_m = \left(\frac{m_{1,0}}{m_{0,0}}, \frac{m_{0,1}}{m_{0,0}}\right)$$

# Momentos de morfología



Combinaciones de momentos de morfología de orden 2 describen ROI's con más detalle mediante sus **ejes principales**:

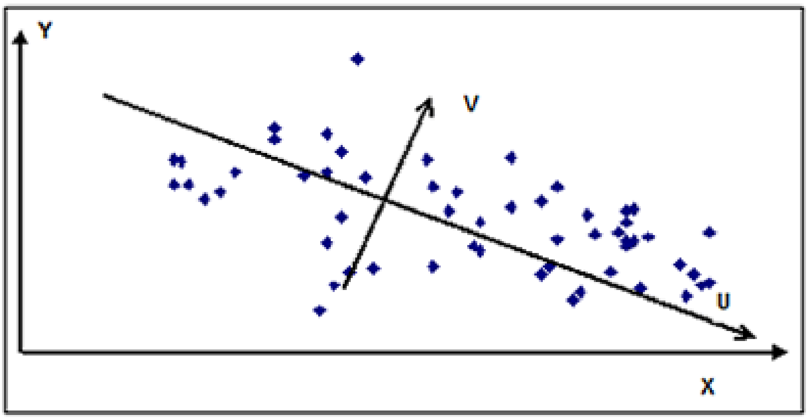


- El **Eje Principal** corresponde a aquel en la dirección a lo largo de la cual la **varianza sea máxima**
- El **Eje Secundario** será el que, siendo ortogonal al anterior, se ubique en la dirección que represente la mayor varianza de puntos
- (3D) El **Eje Terciario**, es ortogonal a los dos anteriores.

# Momentos de morfología



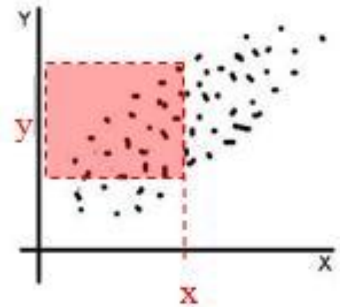
## Varianza



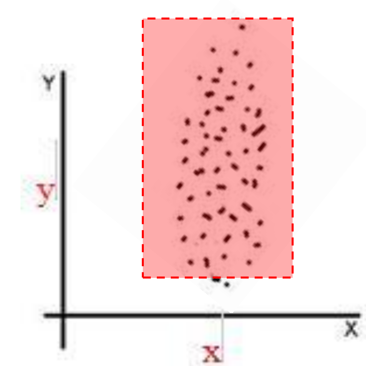

En la nube de puntos, la varianza en X es mayor que en Y, pero si definimos los nuevos ejes U y V obtendremos la **máxima varianza** en U

$$\sigma_x^2 = \frac{\sum(x-\overline{x})^2}{N} = \frac{\mu_{2,0}}{\mu_{0,0}}$$

## Covarianza




Covarianza positiva




Covarianza cero

Su valor representa el **grado de correlación** entre una coordenada y otra en la forma del objeto

$$\sigma_{xy}^2 = \frac{\sum(x-\overline{x})(y-\overline{y})}{N} = \frac{\mu_{1,1}}{\mu_{0,0}}$$

## Cálculo de ejes principales mediante mom. de orden 2

**Matriz de Varianza/Covarianza**

$$\sigma^2 = \frac{1}{\mu_{0,0}} \begin{bmatrix} \mu_{2,0} & \mu_{1,1} \\ \mu_{1,1} & \mu_{0,2} \end{bmatrix}$$

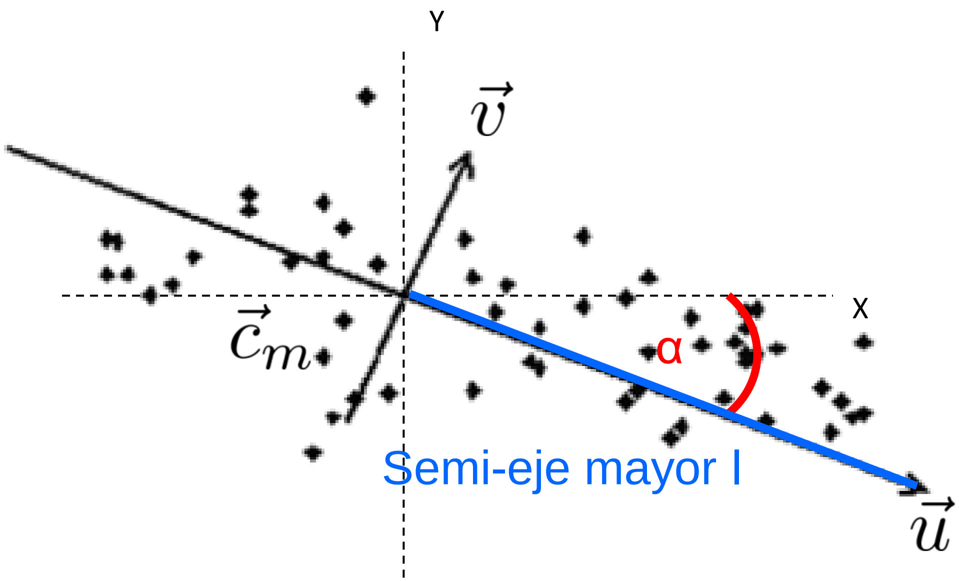
La covarianza será no nula cuando la coordenada **x** nos dé algún indicio de la coordenada **y**

Para el sistema de los ejes principales, las covarianzas se ANULAN
Es decir la matriz es diagonal

# Momentos de morfología



Buscamos dos parámetros para caracterizar el ROI:



# Momentos de morfología

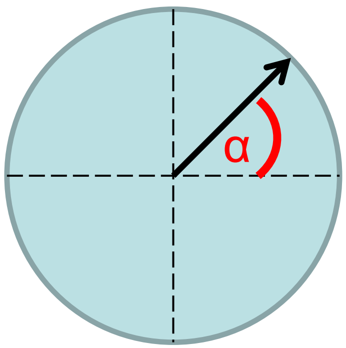
- La rotación del eje mayor la llamaremos “α”
- Si suponemos que la matriz de varianza/covarianza es diagonal al rotar en “α”, entonces:

$$\sigma^2 \vec{u} = \lambda \vec{u} \qquad \sigma^2 :$$ Es la matriz de varianza/covarianza

- Si además supongo que el vector u es unitario

$$\cos(\alpha)^2 + \sin(\alpha)^2 = 1$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$



Laboratory for SCIAN Scientific Image Analysis

# Momentos de morfología

Biomedical Neuroscience Institute

$$\sigma^2 \vec{u} = \lambda \vec{u}$$

$$\vec{u} = \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) \\ \sin(\alpha) \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} (\sigma_{xx}^2 - \lambda)\cos(\alpha) + \sigma_{xy}^2 \sin(\alpha) \\ \sigma_{xy}^2 \cos(\alpha) + (\sigma_{yy}^2 - \lambda)\cos(\alpha) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\alpha = \frac{1}{2}\arctan\left(\frac{2\mu_{1,1}}{\mu_{2,0} - \mu_{0,2}}\right)$$

# Momentos de morfología

- Si la matriz de varianza/covarianza es diagonal al rotar α,
- Conociendo sus valores propios $\lambda$ (2 en 2D y 3 en 3D),
- Sabiendo que la raíz de su valor propio mayor, es el semi-eje mayor $l$

$$l^2 = \lambda = \frac{Tr(\sigma^2)}{2} + \sqrt{\frac{T^2}{4} - det(\sigma^2)}$$

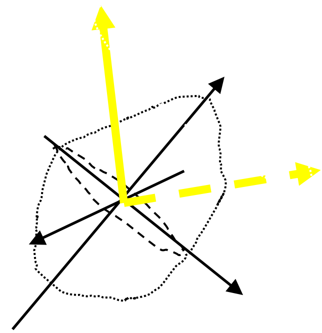
$$l^2 = \lambda = \tfrac{1}{2}\left(\sigma_{xx}^2 + \sigma_{yy}^2 + \sqrt{(\sigma_{xx}^2 - \sigma_{yy}^2)^2 + 4(\sigma_{xy}^2)^2}\right))$$

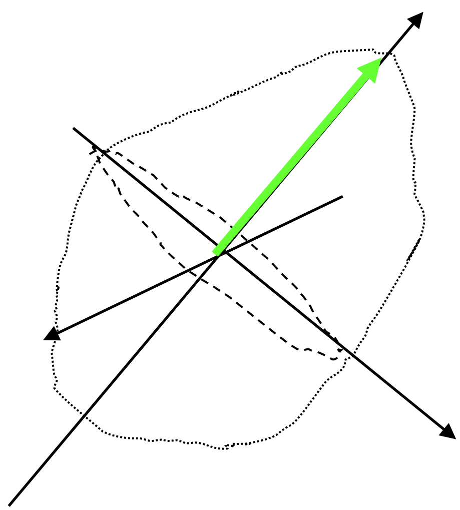
## Momentos de morfología

Los ejes principales son convenientes pues:

- A lo largo de estas direcciones tiene sentido definir las dimensiones del objeto, como LARGO, ALTO y ANCHO.

- En base a las direcciones principales se pueden calcular relaciones de orientación entre distintos objetos

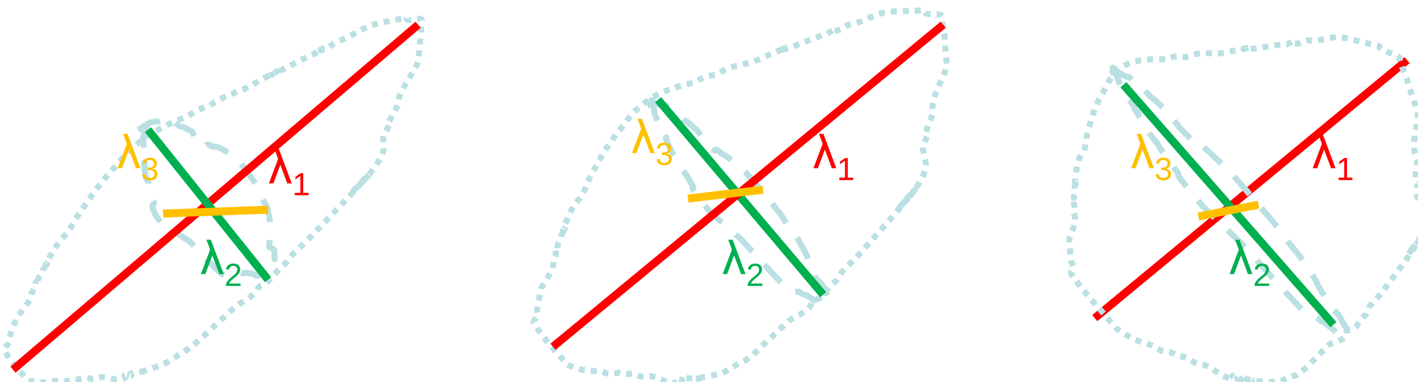




# Momentos de morfología

Comparándolos entre ejes principales, podemos parametrizar características como las elongación (*Elongation*) , elongación relativa (*Rel . Elongation*), o el aplanamiento (*Flatness*) del objeto. Donde $\lambda_1 > \lambda_2 > \lambda_3$

$$Elong = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \qquad R.Elong = 1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \qquad Flatness = 1 - \frac{\lambda_3}{\lambda_2}$$



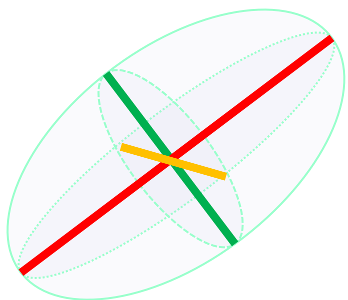

$\lambda_1 >> \lambda_2$
Elong. ~ 1

$\lambda_1 >> \lambda_3$
R. Elong. ~ 1

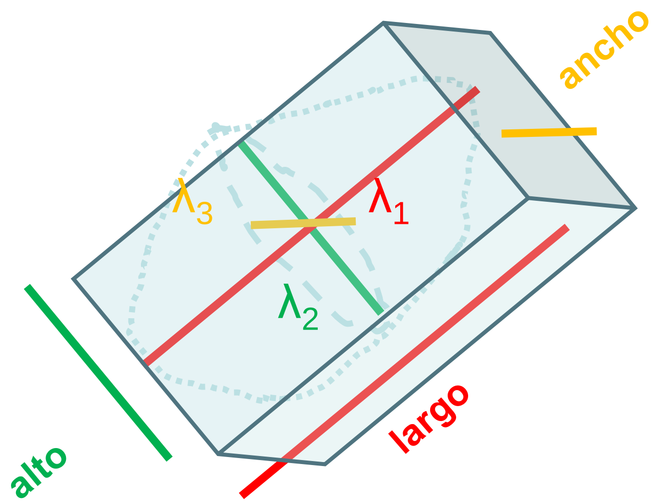
$\lambda_2 >> \lambda_3$
Flatn. ~ 1

# Momentos de morfología

Si el objeto fuese una elipsoide, la proporcionalidad entre el valor propio (varianza) y la dimensión en cada eje principal sería fácilmente calculable



Las dimensiones *reales* del objeto se miden encapsulándolo en una caja de lados perpendiculares a los ejes principales: *Box Parameters*



# Momentos de morfología: discusión



- La obtención del centro de masas nos permite ubicar espacialmente a cada célula
- La varianza nos permite encontrar sus ejes principales (vectores propios) y cuantificar la dispersión en las direcciones de cada eje principal (valores propios)
- Los momentos de orden superior nos permiten parametrizar detalles más finos de la forma, como el nivel de asimetría o de curtosis
- Indices compuestos entre valores propios nos entrega parámetros morfológicos como elongación y aplanamiento

# Ejercicios

¿Cual de las siguientes cantidades es invariante a rotaciones?

$$Elong = 1 - \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$$

$$\alpha = \frac{1}{2} \arctan\left(\frac{2\mu_{1,1}}{\mu_{2,0} - \mu_{0,2}}\right)$$

¿Son los momentos de morfología de orden 2 (centrados), una cantidad invariante a rotaciones?, ¿Qué puede concluir?

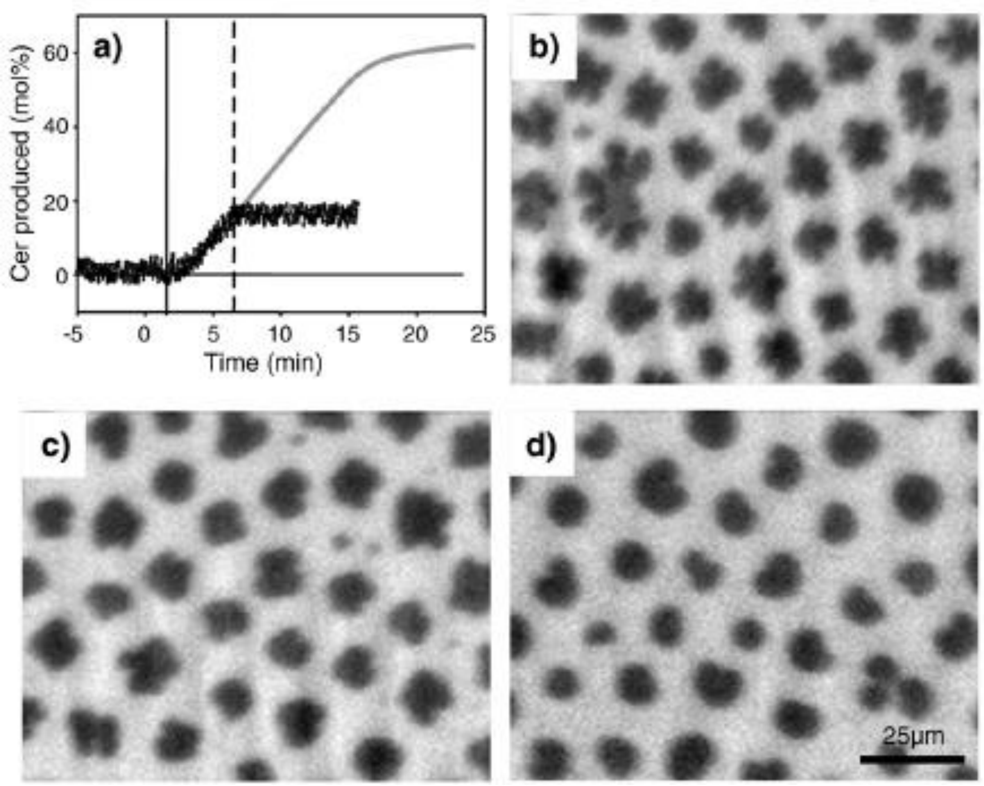
# Resumen

1. Descriptores geométricos: ubicación, perímetro, area, volumen, curvatura.
2. Momentos de morfología (orden 0-2).
3. Descriptores compuestos.
4. Descriptores de grupos de objetos.
5. Topología en computación (skeletons).

# Descriptores compuestos



Comparar un ROI a figuras bien conocidas (círculos, elipses) provee información para caracterizar formas.




Fanani et al. Biochimica et Biophysica, 2010.

¿Cómo cuantificar la evolución temporal?

# Descriptores compuestos

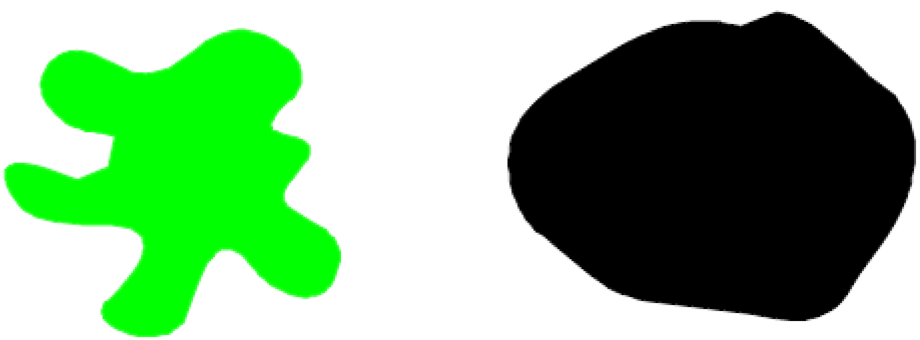
Existen otro indicadores que son especialmente útiles para comparar células.

- Compactación
- Elongación
- Circularidad
- Esfericidad
- Convexidad
- “Solidez”

## Descriptores compuestos: compactación

- Razón entre el area del objeto y el área de un circulo.
- El radio del cículo es la distancia promedio de c_m al borde.
- Valor = 1 para un círculo, π/4 para un cuadrado

$$compactación = \frac{4\pi * area}{perimetro^2}$$

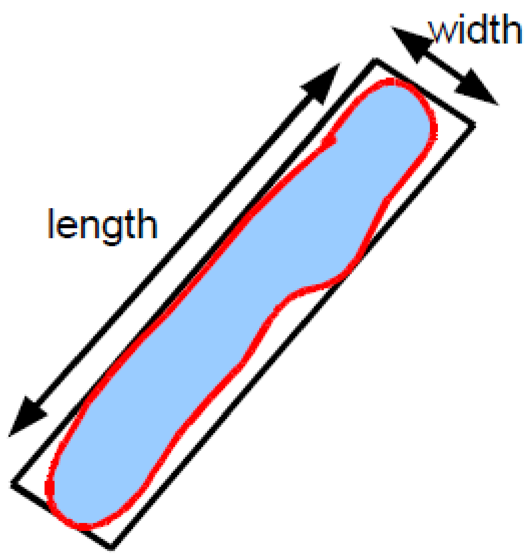


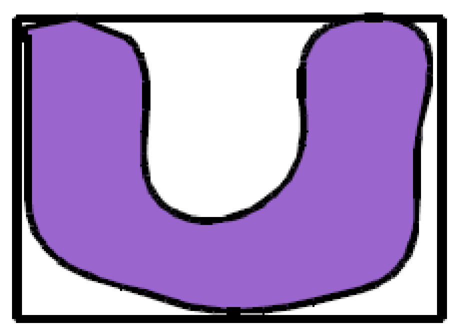
Low compactness High compactness

# Descriptores compuestos: elongación

- Razón entre ancho y el largo del rectangulo que contiene el objeto.
- Diferente a los ejes principales.
- Valores >0, <1, 1 para un cuadrado

$$elongacion = \frac{ancho}{largo}$$

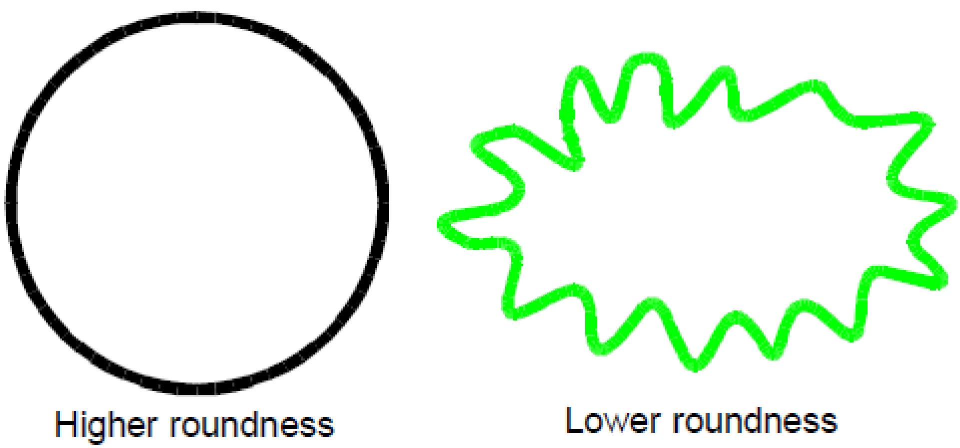


# Descriptores compuestos: circularidad

- Razón entre el area y el area del polígono convexo asociado.
- Polígono convexo -> envoltura convexa (convex hull).
- Valores > 0 y <1, 1 para un círculo.

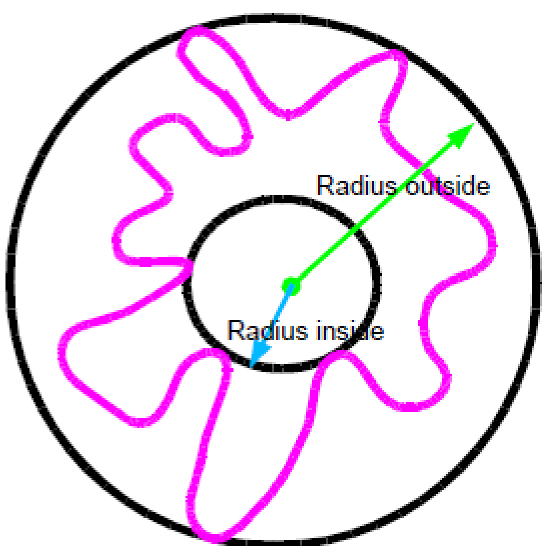
$$circularidad = \frac{4\pi * area}{AreaConvexa}$$



# Descriptores compuestos: esferecidad

- Razón entre radio inscrito y circunscrito.
- Valores > 0 y <1, 1 para un círculo.

$$esfericidad = \frac{R_{inscrito}}{R_{circunscrito}}$$

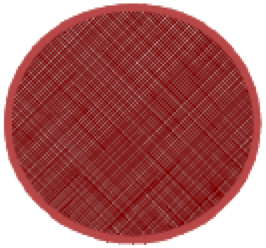


# Descriptores compuestos: convexidad

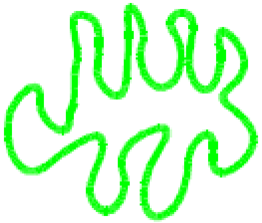


- Razón entre perímetro convexo y del objeto.
- Valores > 0 y <1, 1 para objeto convexo.

$$convexidad = \frac{perimetro_{convexo}}{perimetro}$$



High convexity

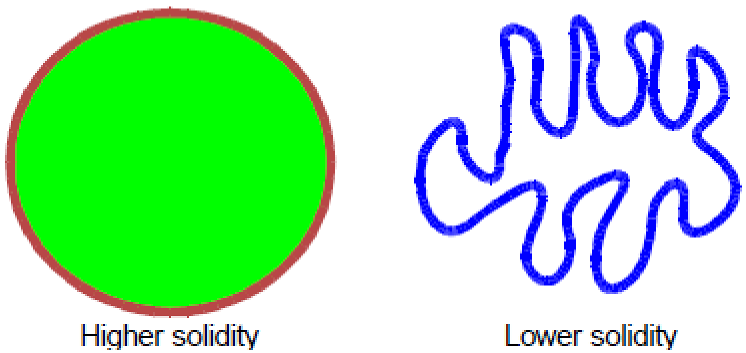


Low convexity

# Descriptores compuestos: solidez

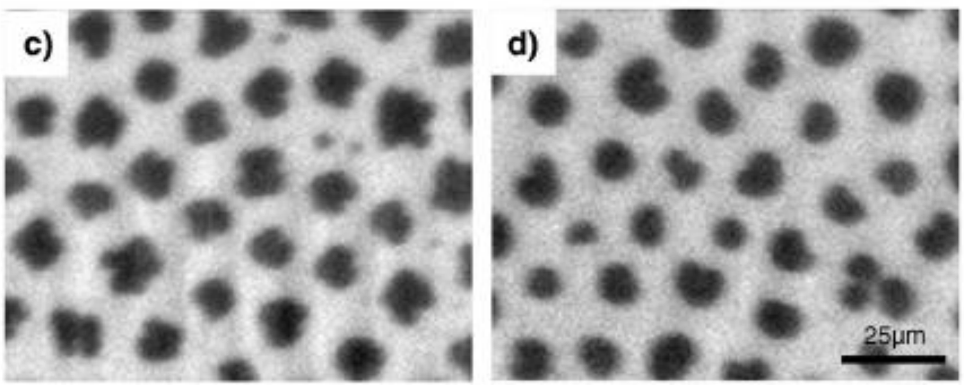
- Razón entre area del objeto y area convexa.
- Valores > 0 y <1, 1 para objeto convexo.

$$solidez = \frac{area}{area_{convexa}}$$



# Ejercicio

Para las siguientes figuras, determine cual parámetro compuesto es más adecuado para cuantificar el cambio.




Fanani et al. Biochimica et Biophysica, 2010.

# Resumen

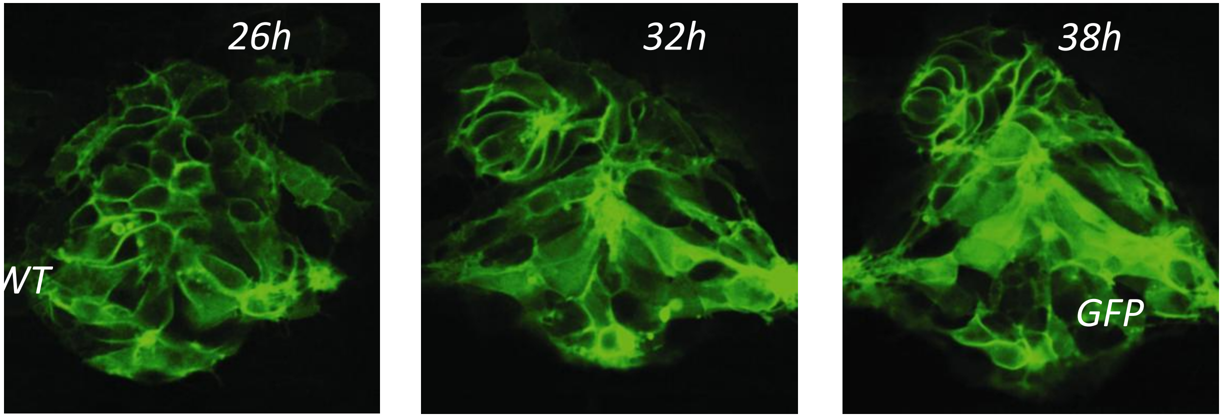
1. Descriptores geométricos: ubicación, perímetro, area, volumen, curvatura.
2. Momentos de morfología (orden 0-2).
3. Descriptores compuestos.
4. Descriptores de grupos de objetos.
5. Topología en computación (skeletons).

# Descriptores de grupos de objetos



Al estudiar conjuntos de objetos (tejidos, glándulas, organos), las relaciones entre parámetros son cruciales. Por ej. En Biología del desarrollo.

**Apical Clustering**




Imagenes, gentileza de Carmen Lemus y colaboradores.

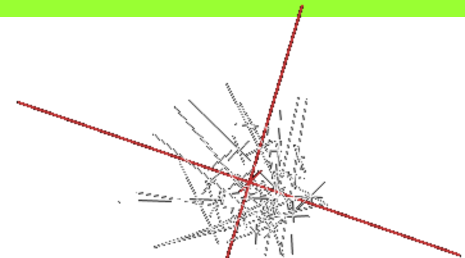
# Descriptores de grupos de objetos

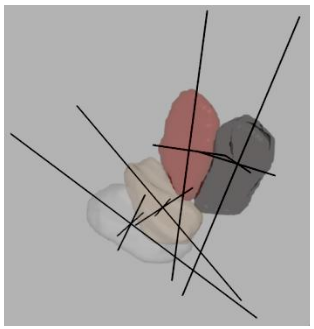


Ya hemos discutido descriptores compuestos. Existen otros indicadores que son especialmente útiles estudiar grupos de ROI y relaciones entre ellos.

- Alineamiento
- Compactación
- Solapamiento

# Descriptores de grupos de objetos: Alineamiento





1st axis aligment

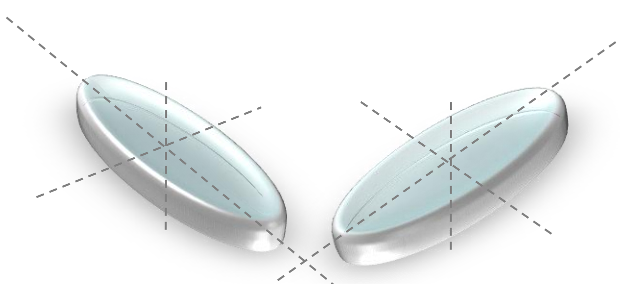
2nd axis aligment

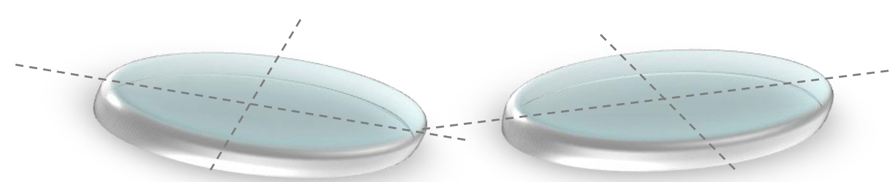
3rd axis aligment

Cada valor representa el ángulo de alineamiento del eje de un objeto con respecto al eje de cada uno de los demás objetos estudiados.

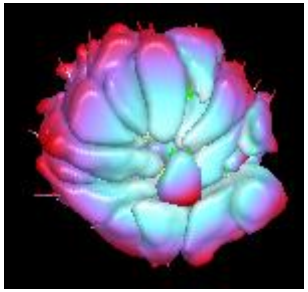
Aligment with major axis (AMA)

Cada valor representa el ángulo de alineamiento del primer eje de un objeto con respecto al primer eje del grupo de objetos.





# Descriptores de grupos de objetos: compactación

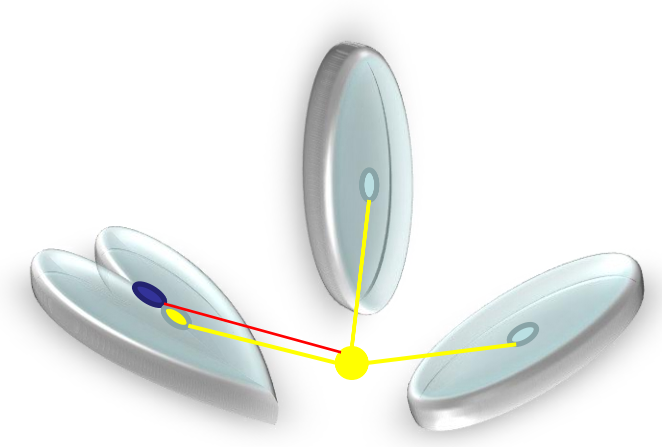


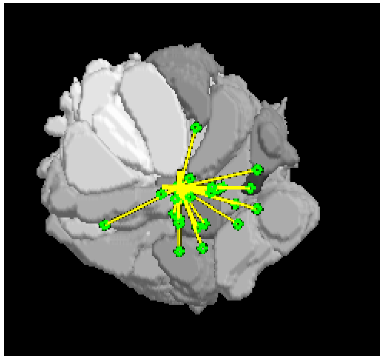
1. Mean object center distances (MOCD)

Promedio de las distancias de un objeto al centro del objeto.

2. Center distances

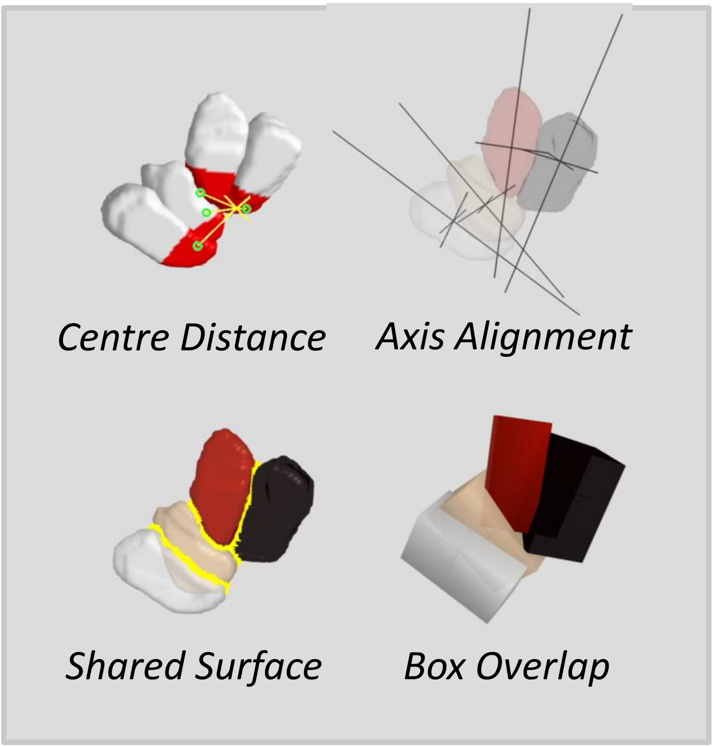
Distancia desde el centro de cada objeto al centro del grupo de objetos





# Descriptores de grupos de objetos: solapamiento

-Solapamiento mide el porcentaje relativo de area/volumen compartido.
- Requiere de un modelo de caja asociado.
-Para el modelo de volumen permite cuantificar la superficie compartida.



# Descriptores de grupos de objetos: aplicación

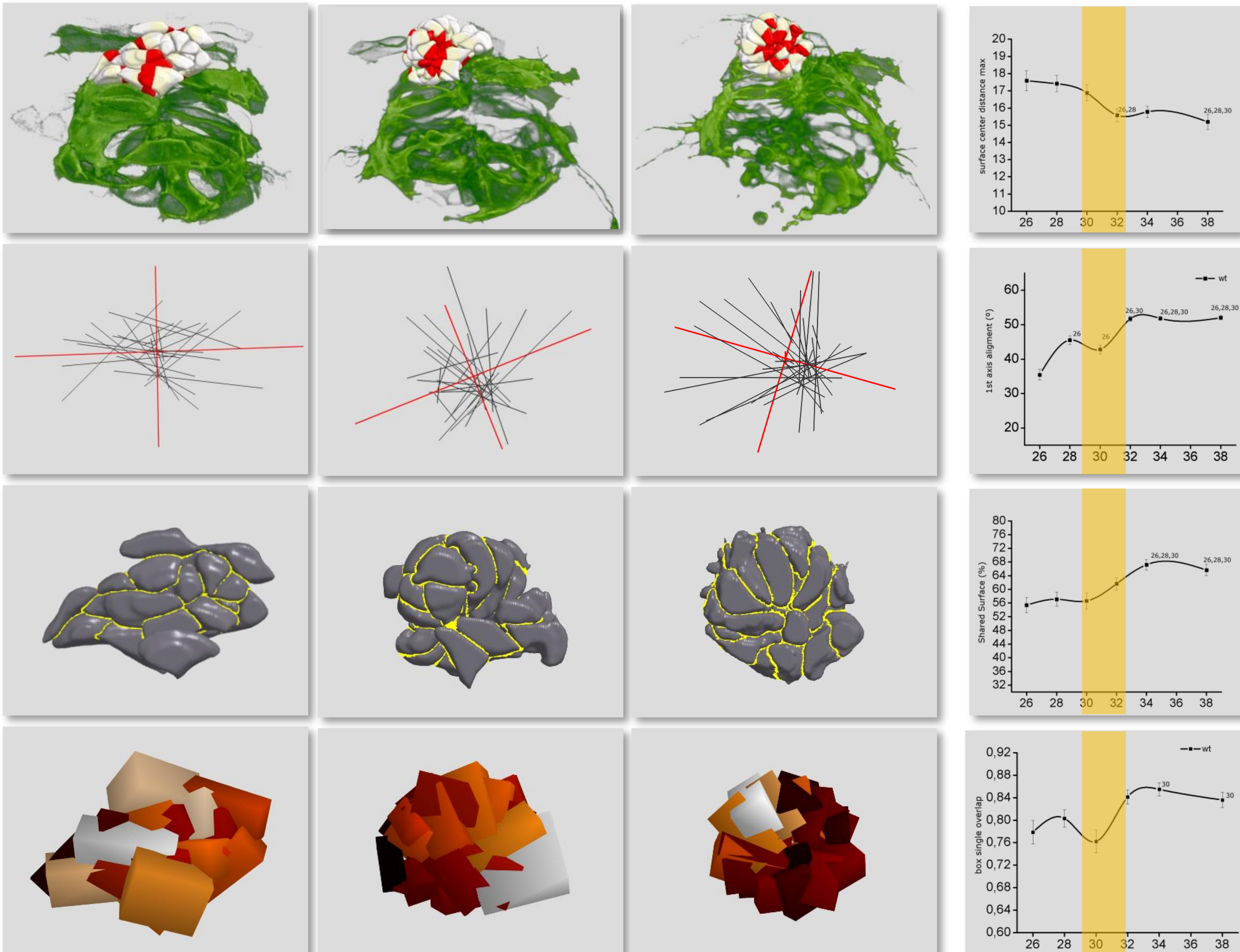
26 h | 32 h | 38 h

*Center Distance*

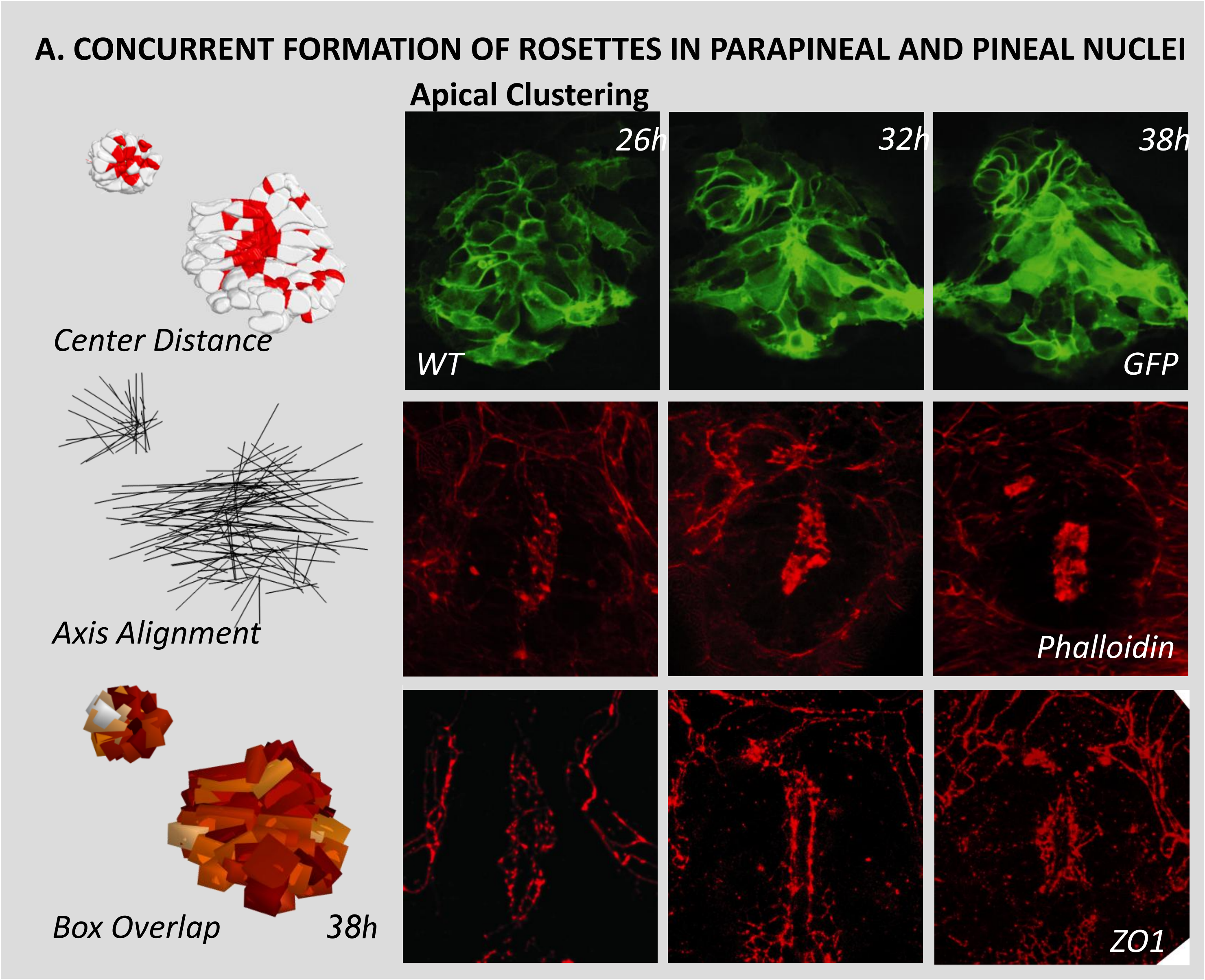
*Axis Alignment*

*Shared Surface*

*Box Overlap*



# Descriptores de grupos de objetos: aplicación



# Descriptores de grupos de objetos: discusión

- Hemos presentado algunos descriptores de grupos.

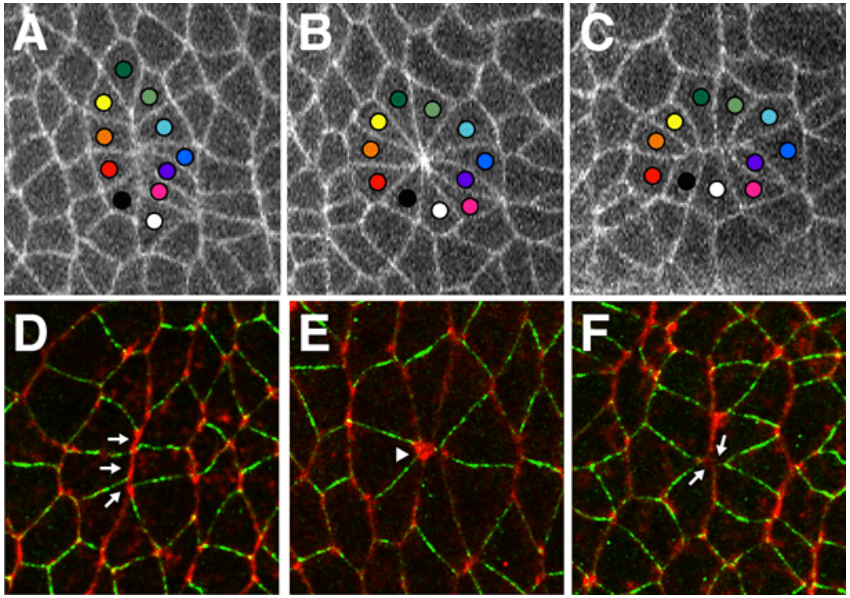
- Se basan en los descriptores simples ya estudiados.

- Especialmente utilizados en biología del desarrollo.

- Suelen ser ajustados según el problema a resolver, Ej. entropía de ejes principales u otros.

Para los siguientes procesos de grupo, determine graficamente la evolución de la alineación (del eje principal y secundario), compactación y solapamiento en el tiempo.

t1 t2 t3




Blankenship et al. 2006, Cell Development.

# Resumen

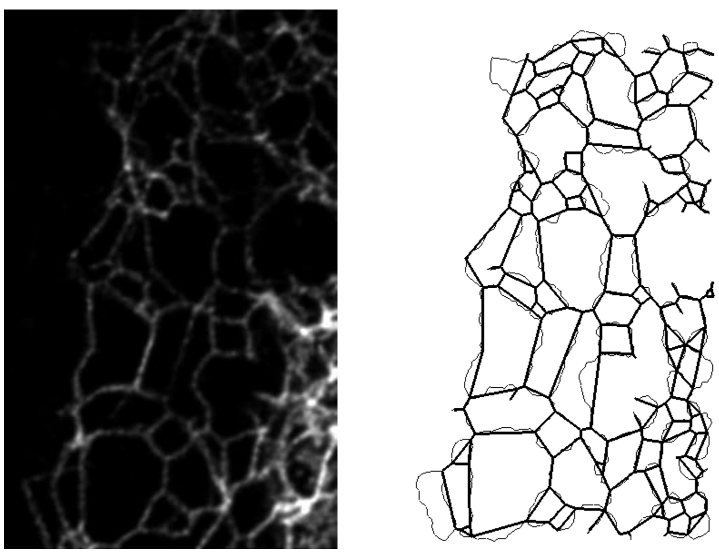
1. Descriptores geométricos: ubicación, perímetro, area, volumen, curvatura.
2. Momentos de morfología (orden 0-2).
3. Descriptores compuestos.
4. Descriptores de grupos de objetos.
5. Topología en computación (skeletons).

# Topología

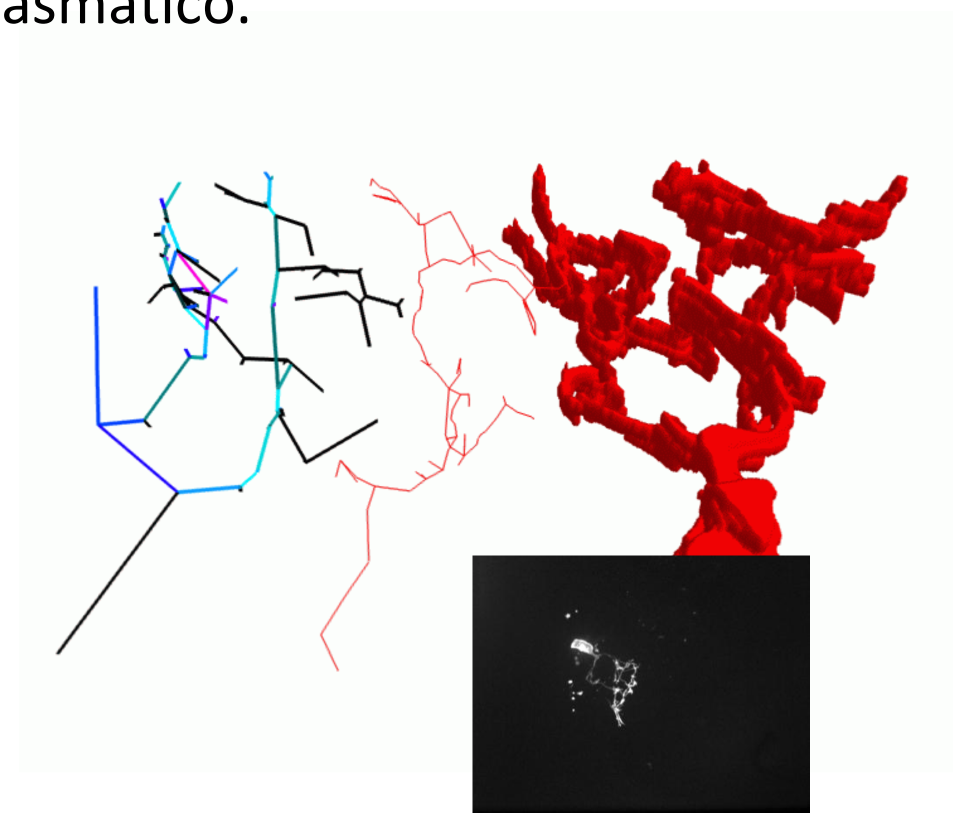


Para ROI binarios, hemos estudiado diferentes descriptores pero, ¿cómo caracterizar estructuras biológicas complejas?

Ej. Neuronas, Reticulo endoplasmatico.



Imágen original y Segmentación gentileza Omar Ramírez y Jorge Toledo respectivamente.



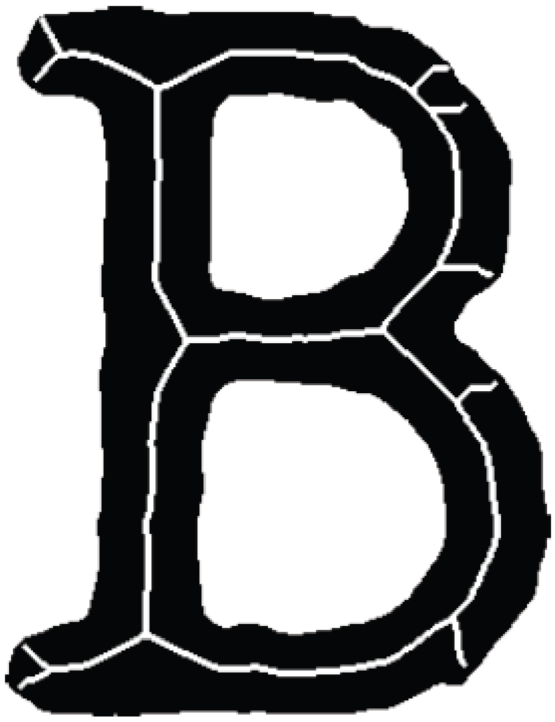
Imágen original y segmentación (3D), gentileza Karina Figueroa y colaboradores.

# Topología: definición



¿Qué es un skeleton?

- Es una representación 1D de un objeto (sólo líneas)
- Aproximadamente equidistante de los bordes del objeto.
- Busca retener sus propiedades geométricas y topológicas (como conectividad, largo, ancho, túneles)



# Topología: definición



Problema con los skeletons: no tienen una sola definición.

Las más aceptadas son dos:

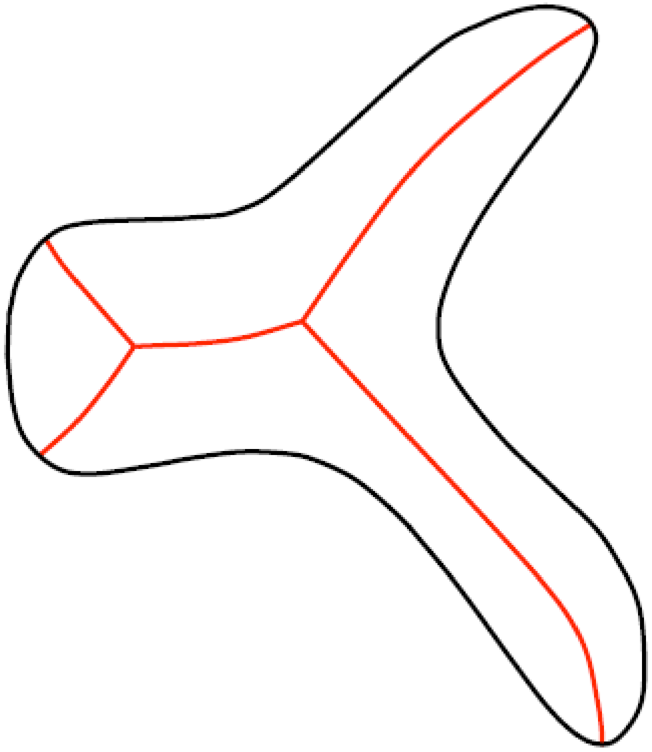
- Eje medial y superficie medial.
- Centro de discos o bolas maximales.

- Por lo tanto, se pueden obtener diferentes skeletons a partir del mismo objeto (especialmente con modelos 3D discretos).
- Además, no siempre los skeletons obtenidos por definición son buenos (dependiendo del problema) y existen muchos algoritmos para generar skeletons

# Topología:
# Eje/superficie medial



Locus de puntos de la figura que tienen al menos dos puntos más cercanos en el borde.



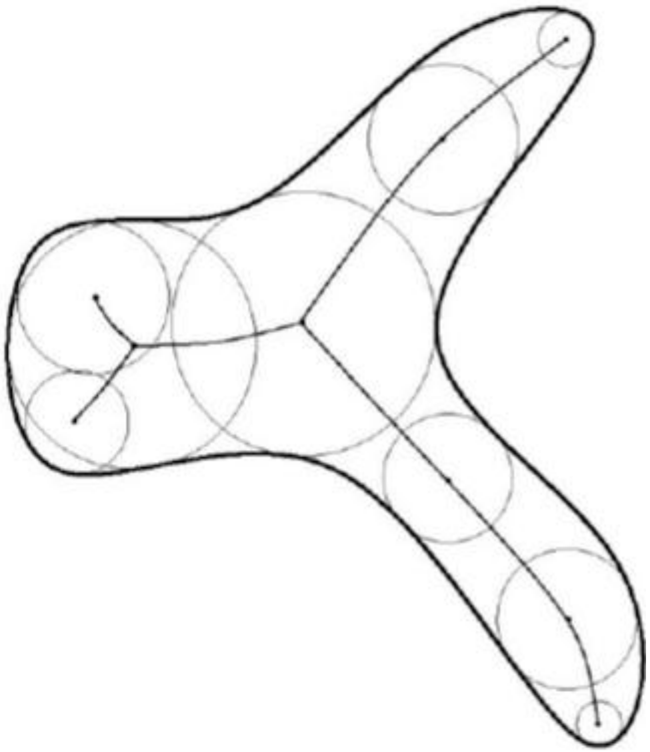
- Caso 2D: eje medial.
- Caso 3D: superficie medial.
- En este caso, no se obtiene directa-mente un skeleton, que debe ser 1D.
- Se puede utilizar como punto de partida.

# Topología:
# Centro de discos



Definición de skeleton más aceptada.

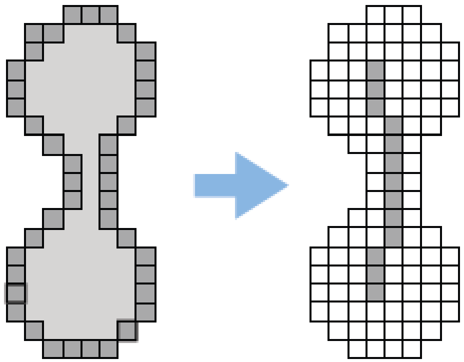
- Locus de puntos que corresponden a centros de discos (caso 2D) o esferas (caso 3D) maximales abiertos inscritos en el objeto.
- Una bola dentro de un objeto es maximal cuando no está incluida en ninguna otra bola del objeto.

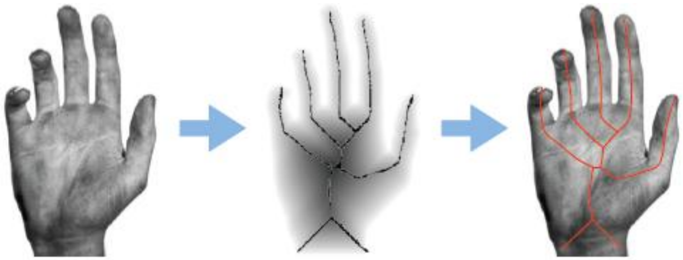


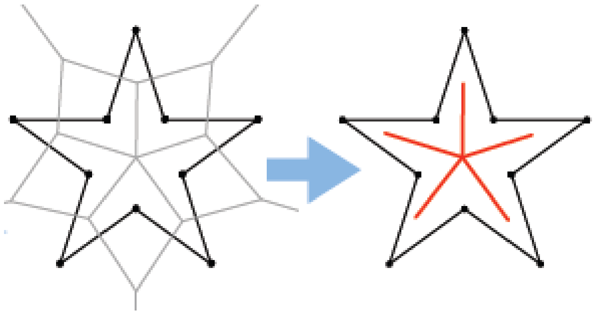
# Topología: algoritmos

Existen múltiples algoritmos para el calculo de skeletons, basado en criterios:

- Morfológicos
- Grafos
- Geométricos



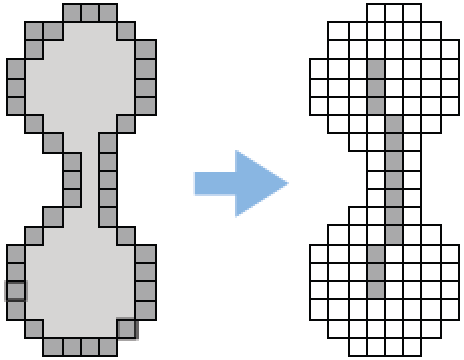




# Topología: morfológicos



Se basan en remover iterativamente píxeles o voxeles simples del borde de un objeto hasta alcanzar el espesor deseado (1).

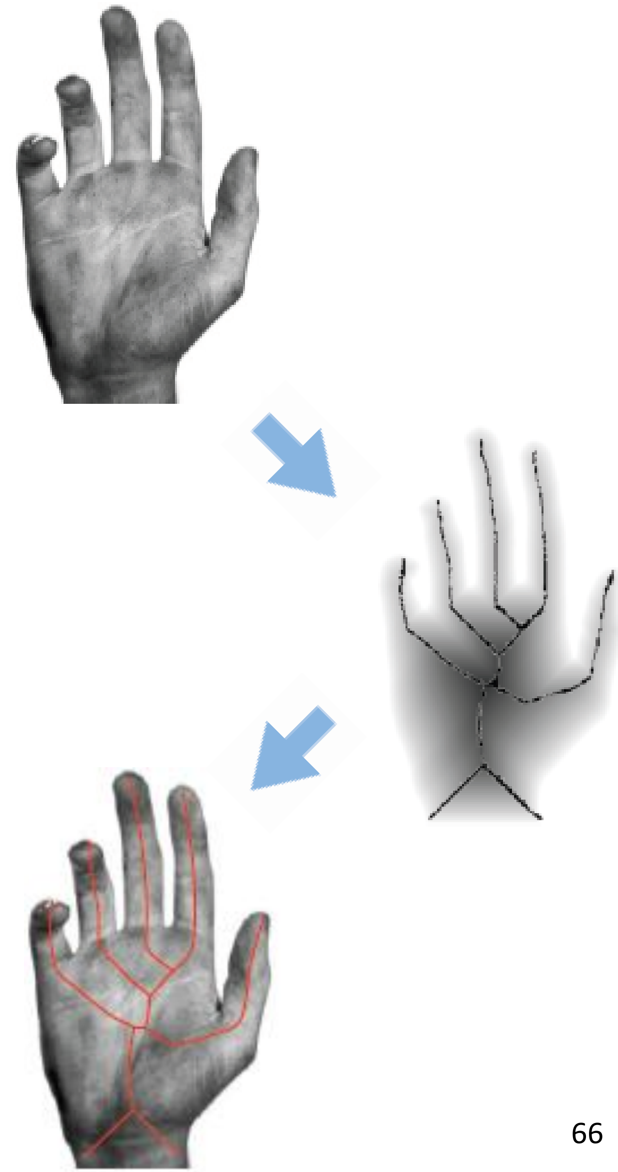


- Funcionan solamente en el espacio discreto.
- El resultado no está centrado.
- Sensible a ruido.
- Rápido.
- Disponible comúnmente (imageJ)

# Topología: grafos



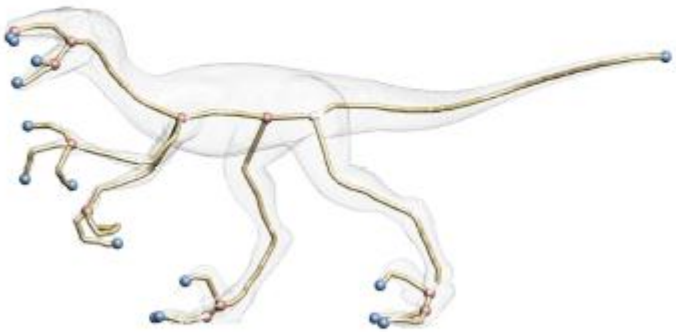
- Una función de distancias se define para los puntos interiores de un objeto.
- El campo de distancias consiste en la menor distancia desde cada punto hasta el borde del objeto.
- Crestas de la función de campo: locus de puntos que están centrados localmente dentro del objeto (máximos locales).
- Múltiples parámetros a configurar en nuestras pruebas.

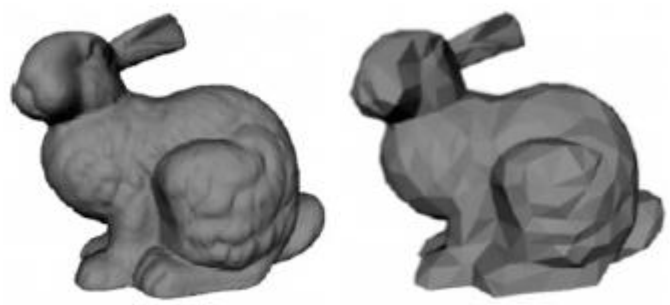


# Topología: geométricos



- Algoritmo geométrico basado en la suavización y simplificación de una malla geométrica.
- Diseñado para mallas de superfice.
- Resultado centrado.
- Robusto a ruido.
- Lento de calcular (días).
- Implementado y mejorado en SCIAN-Lab.



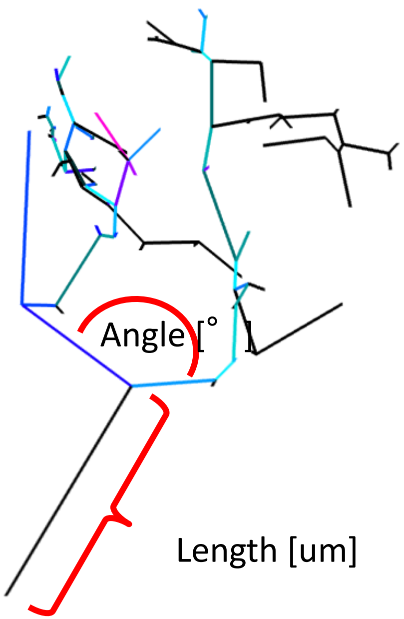


# Topología: parámetros

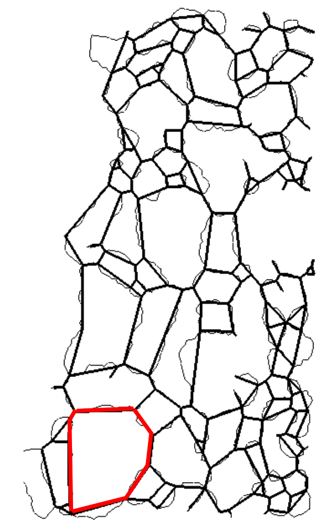


¿Qué parámetros de interés se pueden calcular de un skeleton? (un grafo en general)

- Nro de nodos
- Nro de arcos
- Nro de túneles
- Largo de cada arco
- Grado de cada bifurcación




Palma et al, 2012




Ramirez et al., 2012

# Topología:
# parámetros avanzados

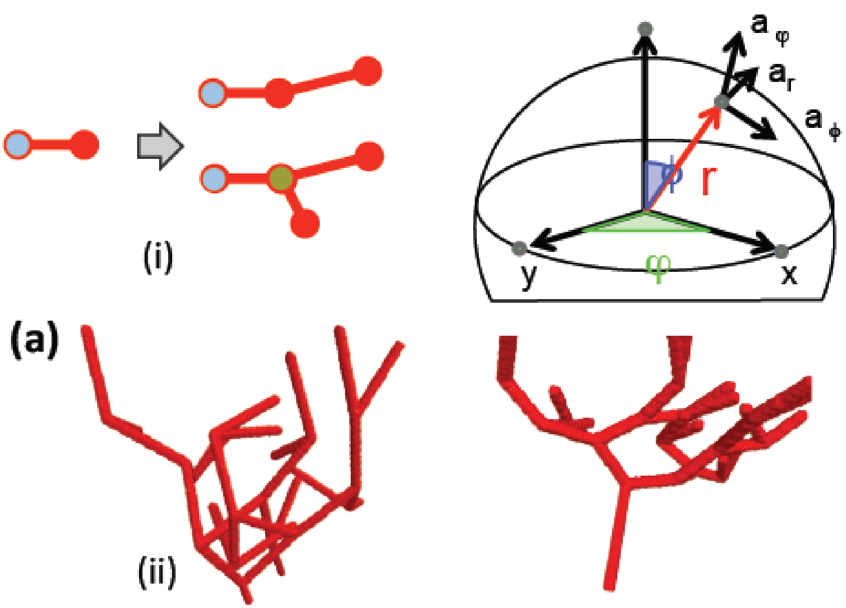
Existen otro tipo de parámetros, inspirados por la teoría de grafos y complejidad:

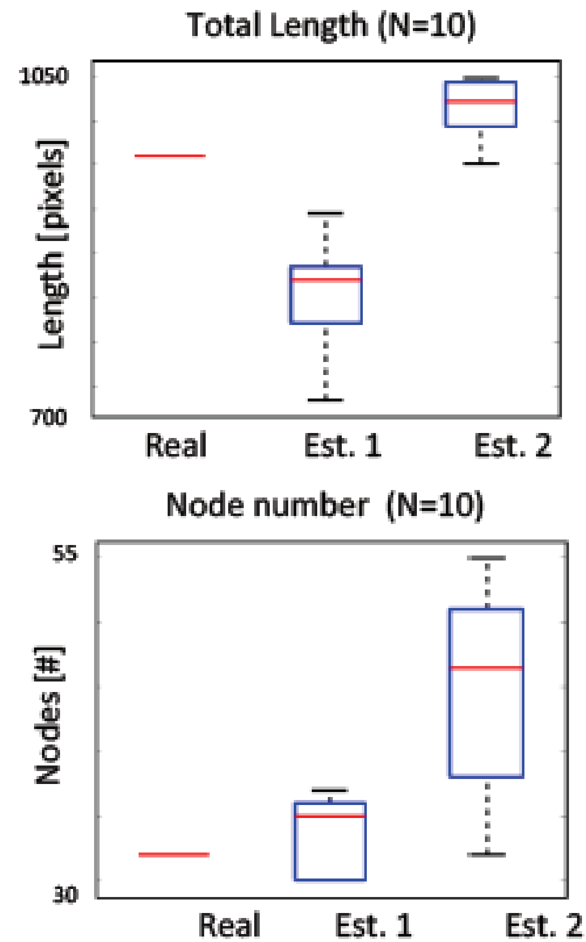
- Complejidad de Scholl (scholl analysis)
- Camino más corto
- Entropía
- Complejidad de Kolmogorov

# Topología



Comparacion de la exactitud de dos algorimos para calcular skeletons en estructuras tipo arbol.



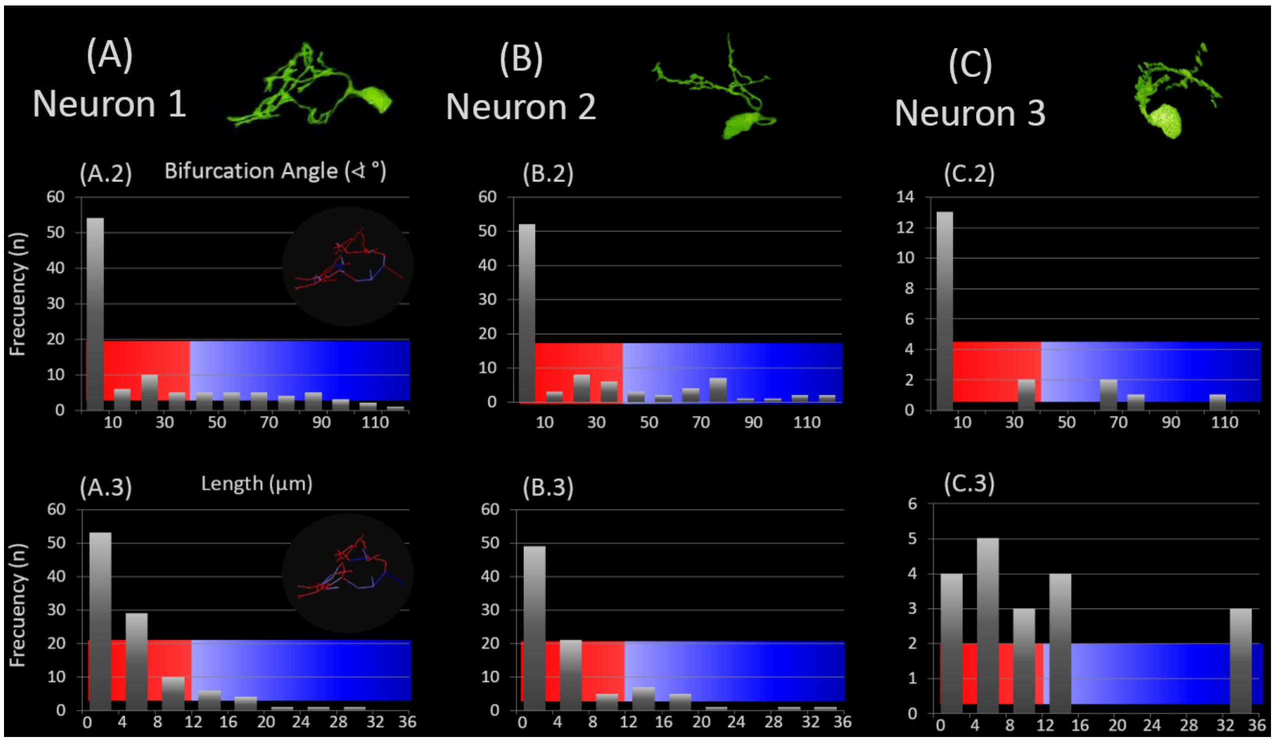



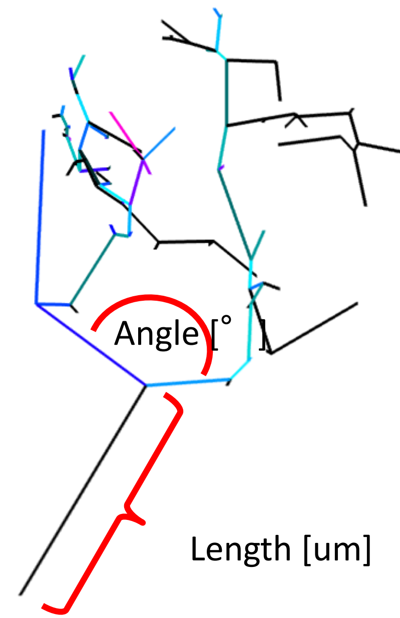

**Est. 1 :** Skeleton geometrico
**Est 2. :** Skeleton morfologico.

Villarroelet al, 2012

# Topología

Veamos algunos ejemplos de parametros de un grafo y su interpretración biológica: un árbol dendrítico.



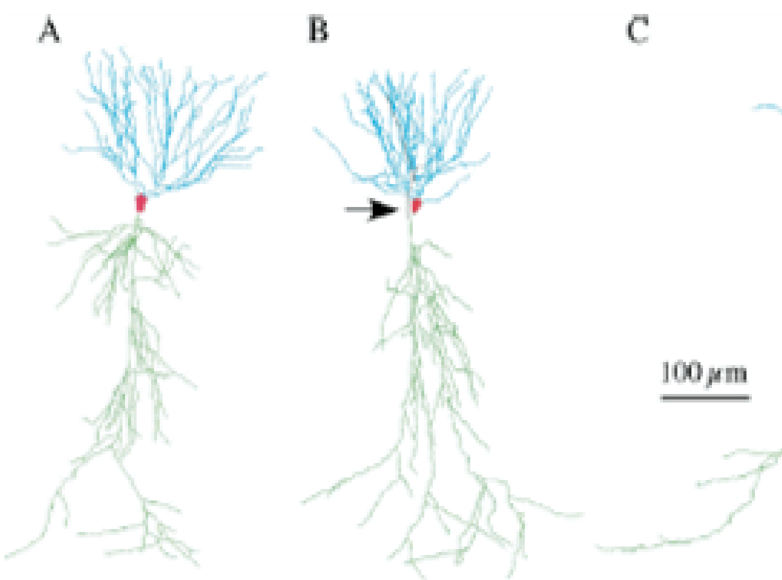

Palma et al, 2012

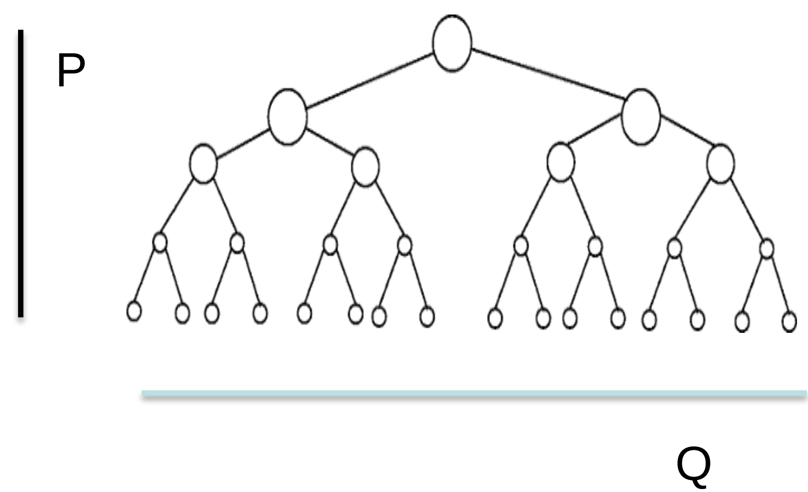
Dibuje el skeleton de las siguientes figuras siguiendo la definición de discos maximos y distancia medial, ¿qué puede concluir?

# Ejercicios

Es comun dividir los grafos de neuronas en las zonas apicales y basales y calcular su largo (ver figura), suponga que el árbol dendrítico es binario (con bifurcaciones en 45° ), cada arco de largo l (de un total de n, nodos), y simétrico:

- ¿cuál será el largo de la zona apical? (P)
- ¿cuál será el ancho de esta zona? (Q)




Ruan et al. 2006, Neuroscience.