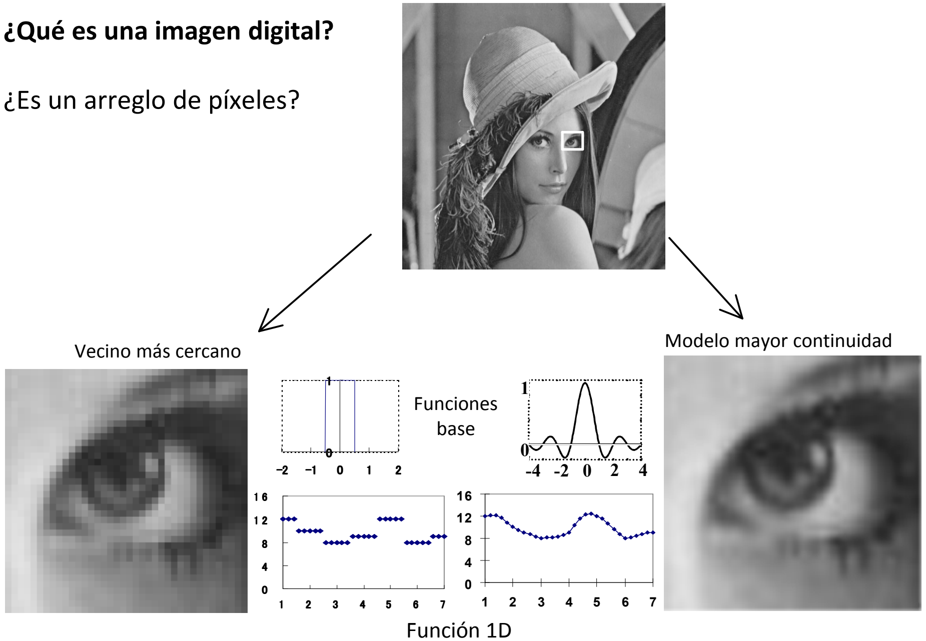
1. Sistemas Lineales e Invariantes a la Traslación

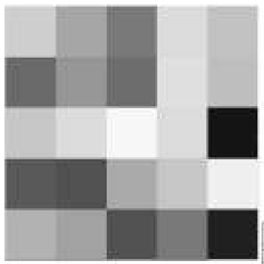
1.1 Motivación de las imágenes digitales

¿Qué es una imagen digital?

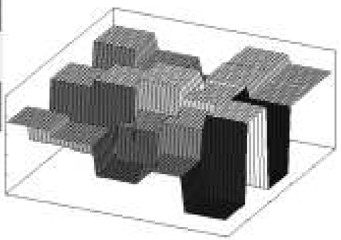
¿Es un arreglo de píxeles?



Detalle de una imagen digital



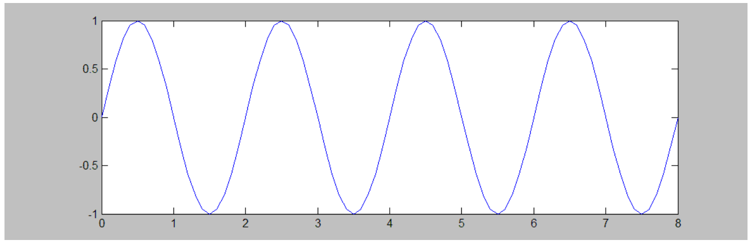
Modelo basado en píxeles
(constante por área cuadrada)



El hecho que se trabaja con imágenes digitales tiene que ser considerado al momento de implementar el procesamiento de esas imágenes.

1.2 Las funciones sinusoidales

- Onda plana (viajera) que avanza en el espacio



- Está representada por la función:

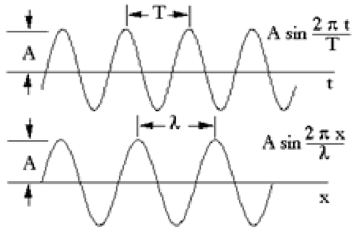
$$f(x,t) = \sin(\omega t - kx)\,, \qquad c = \omega/t$$

- Frecuencia: es la cantidad de ciclos que se repite una función sinusoidal en un intervalo determinado
- Frecuencia

  Angular: $\omega = 2\pi\, T\ [{}^{rad}/_{seg}]$

  Temporal: $\nu = {}^{1}/_{T}\left[\frac{1}{seg}\ \text{ó}\ Hertz\right]$

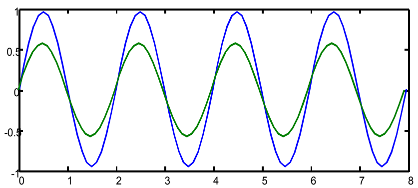
  Espacial: $k = {}^{2\pi}/_{\lambda}\left[\frac{rad}{sm}\right]$

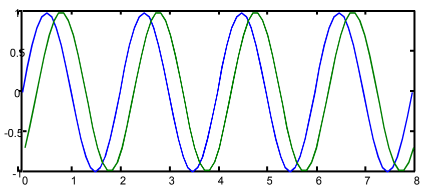


- Representación de una señal en base a sinusoides:

$$\bar{f}_\ell(x) = A_\ell\, sin(k_\ell x + \theta_\ell)\,, \qquad k_\ell = \ell k_0$$

- Amplitud
- Fase





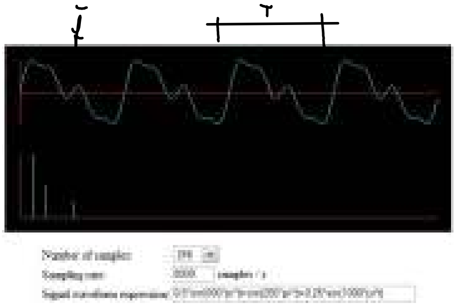
1.3 Series de Fourier y Transformación Discreta de Fourier

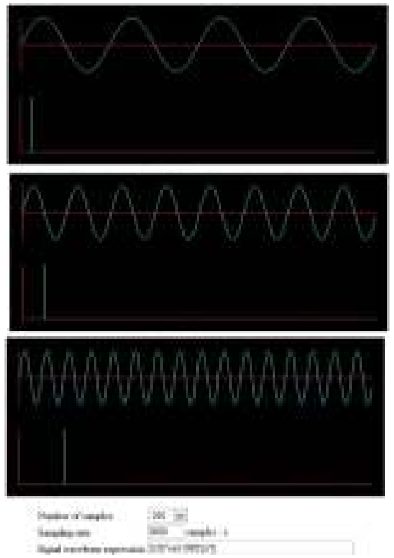
1.3.1 Series de Fourier

Composición de una señal (series de Fourier):

$$\bar{f}(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \bar{f}_\ell(x) = \sum_{\ell \in \mathbb{Z}} A_\ell \sin(k_\ell x + \theta_\ell), \qquad k_\ell = \ell k_0$$

Ejemplo: Una función continua puede descomponerse en diferentes funciones sinusoidales





Estas funciones sinusoidales se indexan por la frecuencia $k\omega_0$, especificando

la amplitud $A_k = \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2}$

y la fase $\phi_k = \arctan b_k / a_k$

Una serie de Fourier se define en base a una suma de armónicos (múltiplos de una frecuencia base) de funciones periódicas (sinusoidales o exponenciales con exponente imaginaria).

$$\bar{f}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}_+} a_k \cos(k\omega_0 x) + b_k \sin(k\omega_0 x) \qquad \qquad \bar{f}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k e^{jk\omega_0 x}$$

función real $\bar{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $\quad a_k, b_k \in \mathbb{R}$ función compleja $\bar{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\quad c_k \in \mathbb{C}$

El espacio de $\bar{f}$ es el de las funciones periódicas, cuyo período es $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Notar que ésta forma de representación aparte de ser periódica, es también lineal.

1.4 Sistemas Lineales e Invariantes a la Traslación (LIT)

1.4.1 Sistemas lineales $g(x) = \mathcal{K}(f(x))$

Linealidad Si $f_1: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $f_2: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ y $\mathcal{K}: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$ y

$$\mathcal{K}\{\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)\} = \alpha_1 \mathcal{K}\{f_1(x)\} + \alpha_2 \mathcal{K}\{f_2(x)\}$$

entonces $\mathcal{K}$ es una operación lineal

En general, si $g_i(x) = \mathcal{K}(f_i(x)) \quad i = 1, \dots, N$

Para la linealidad

$$\mathcal{K}\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i g_i(x)$$

$$g(x) = \int_\Omega K(x, y)\, f(y)\, dy$$

De hecho

$$\int_\Omega K(x,y) \sum_{i=1}^{2} \alpha_i f_i(y) dy = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \int_\Omega K(x,y) f_i(y) dy$$

$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i g_i(x)$$

cumple con la condición de linealidad

La versión discreta $g[n] = \sum_{\ell \in \Omega} K[n, \ell]\, f[\ell]$

La versión matricial

$$\begin{bmatrix} g[1] \\ \vdots \\ g[N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K[1,1] & K[1,L] & \cdots & K[1,L] \\ \vdots & & \ddots & \vdots \\ K[N,1] & \cdots & & K[N,L] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[1] \\ \vdots \\ f[L] \end{bmatrix}$$

1.4.2 Sistemas invariantes a la traslación

$$g(x-x_0) = \mathcal{K}(f(x-x_0))$$

Al reemplazar la linealidad en la invariancia a la traslación en la parte derecha:

$$\int_\Omega K(x,y)\, f(y-x_0)\, dy = \int_{\tilde{\Omega}} K(x, \tilde{y}+x_0)\, f(\tilde{y})\, d\tilde{y}$$

Mientras que en la izquierda $\int_\Omega K(x-x_0, y)\, f(y) = g(x-x_0)$

Para cumplir con la invariancia a la traslación y despreciando las condiciones de borde $K(x, y+x_0) = K(x-x_0, y)$

Por esta razón, $K(x,y) = h(x-y)$

En efecto $K(x, y+x_0) = h(x-(y+x_0)) = h((x-x_0)-y) = K(x-x_0, y)$

Por lo tanto para un sistema Lineal e Invariante a la Traslación (LIT):

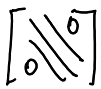
$$g(x) = \int_\Omega h(x-y)\, f(y)\, dy$$

La versión discreta $g[n] = \sum_{l\in\Omega} h[n-l]\, f[l] = \sum_{l\in\Omega} h[l]\, f[n-l]$

La versión matricial

$$\begin{bmatrix} g[1] \\ \vdots \\ g[N] \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \ddots & & & & & \\ h[-1] & h[0] & h[1] & & & \\ & h[-1] & h[0] & h[1] & & \\ & & h[-1] & h[0] & h[1] & \\ & & & & & \ddots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f[1] \\ \vdots \\ f[N] \end{bmatrix}$$

Matrices con *m* diagonales



1.5 Convolución

se define como la operación convolución $\circledast$ como

$$g(x) = h \circledast f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-y) f(y)\, dy$$

1.5.1 Identidad en la convolución

Se cumple si $f \circledast \delta(x) = f(x)$

Delta de Dirac

$$\delta(x) = \begin{cases} \infty & \text{si } x = 0 \\ 0 & \text{si } x \neq 0 \end{cases} \quad y \quad \int_{-\infty}^{\infty} f(x)\,\delta(x-x_0)\, dx = f(x_0)$$

$$\Downarrow$$

$\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$ Normalización

Identidad en versión vectorial

$I\vec{x} = \vec{x}$ con $I = \begin{bmatrix} 1 & & 0 \\ & \ddots & \\ 0 & & 1 \end{bmatrix}$

1.5.2 Respuesta al impulso (función de transferencia)

$$h \circledast \delta(x) = h(x)$$
$$\mathcal{H}\{\delta(x)\} = h(x)$$

$$\delta \rightarrow \boxed{\mathcal{H}} \rightarrow h$$

h(x) viene a ser el Point Spread Function (psf)

1.5.3 Conmutatividad

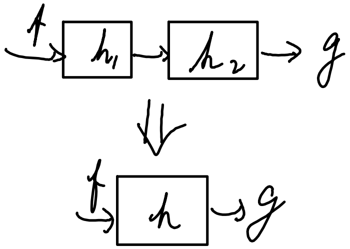
La convolución tiene la propiedad de conmutatividad

$$h \circledast f(x) = f \circledast h(x)$$

Dem:

$$h \circledast f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) f(x-y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(y) h(x-y)\, dy$$
$$= f \circledast h(x)$$

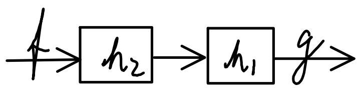
1.5.4 Asociatividad (bloques)



$$g(x) = h_2 \circledast h_1 \circledast f(x)$$
$$= h_2 \circledast (h_1 \circledast f)(x)$$
$$= (h_2 \circledast h_1) \circledast f(x)$$
$$= h \circledast f(x)$$

$$h(x) = h_1 \circledast h_2(x)$$
$$= h_2 \circledast h_1(x)$$

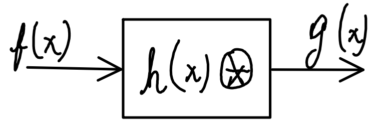
Notar que el orden de los sistemas se puede intercambiar , debido a la conmutatividad



1.6 Transformación de Fourier

1.6.1 Procesamiento de sistemas LIT

Se tiene un sistema H siendo $\circledast$ la convolución



$$g(x) = h \circledast f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-y) f(y)\, dy$$

usando $\boxed{f(x) = e^{j\omega x},}$ $j = \sqrt{-1}$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) f(x-y)\, dy = \int_{-\infty}^{\infty} h(y)\, e^{jw(x-y)}\, dy$$
$$= e^{jwx} \int_{-\infty}^{\infty} h(y) e^{-jwy}\, dy = \underbrace{e^{jwx}}_{\text{entrada}} \underbrace{H(w)}_{\text{valor } \mathbb{C}}$$

con la transformación de Fourier $\boxed{H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-j\omega x}\, dx}$

$\therefore$ $f(x) = e^{j\omega x}$ es una función propia $\boxed{\overset{h\circledast}{H} f = \overset{H(\omega)}{\lambda} f}$ Valor propio

donde $H(\omega)$ son los valores propios correspondientes

La transformación inversa de Fourier es $\boxed{h(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{j\omega x}\, d\omega}$

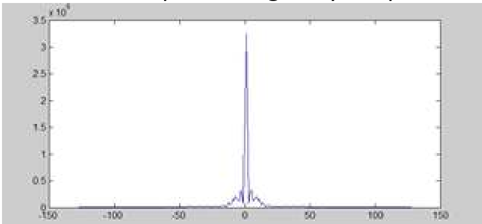
1.6.2 Propiedades traslación de la Transformación de Fourier

$$f(x-x_0) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega)\, e^{j\omega x_0}$$ Desplazamiento

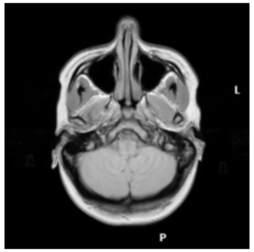
$$f(x)\, e^{j\omega_0 x} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F(\omega-\omega_0)$$ Desplazamiento en frecuencia

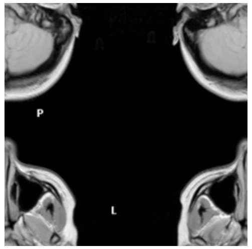
Ejemplo del efecto de traslación:

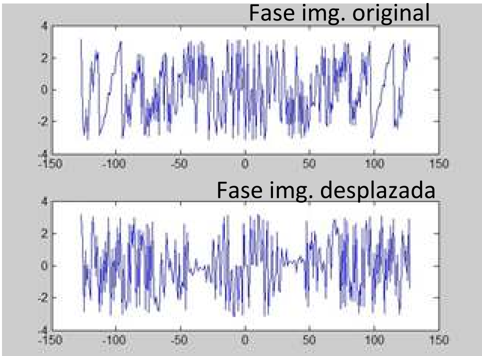
Amplitud original y desplazada



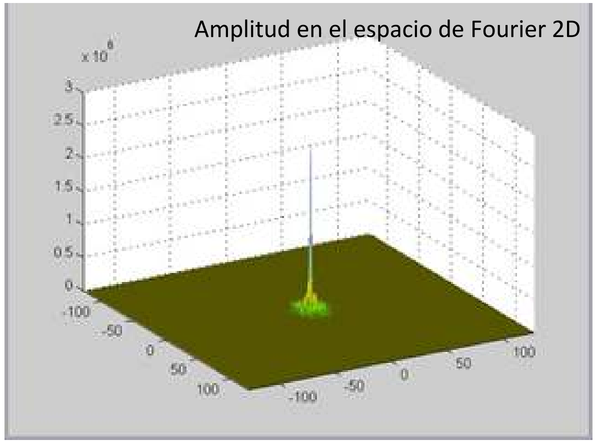
Señal Original





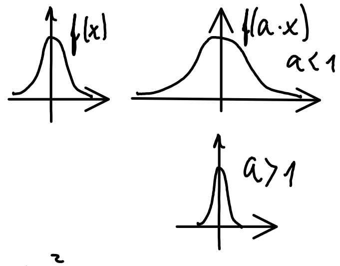


Señal Desplazada



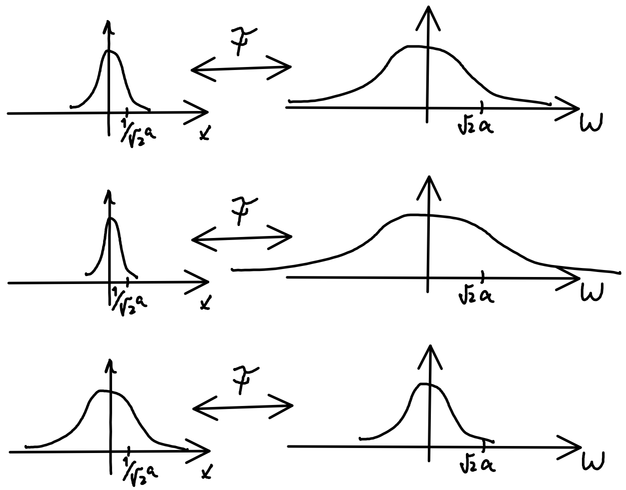
Escalamiento

$$f(ax) \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{1}{|a|} F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



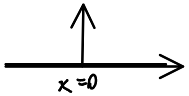
Ejemplo: una función gaussiana

$$e^{-a^2x^2} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \frac{\sqrt{\pi}}{a}\, e^{-\frac{\omega^2}{4a^2}}$$



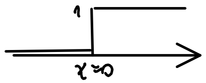
1.6.3 Ejemplos de Transformaciones de Fourier

a) Delta de Dirac



$$\delta(x) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{j\omega x} dx = e^{j\omega \cdot 0} = 1$$

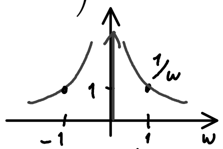
b) Respuesta al escalón (Heaviside)



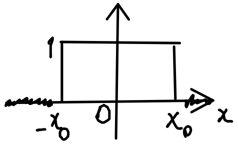
Por la transformada de una integral de una función

$$u(x) = \begin{cases} 0 & si\ \ x < 0 \\ 1 & si\ \ x > 0 \end{cases} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right) 1$$

$$= \int_{-\infty}^{x} \delta(z) dz$$



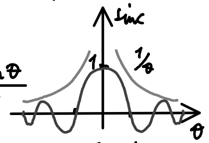
c) Función Rectangular



$$rect_{x_0}(x) = u(x + x_0) - u(x - x_0)$$

$$\updownarrow \mathcal{F}$$

$$sinc\ \theta = \frac{sen\,\theta}{\theta}$$



$$Rect_{x_0}(\omega) = e^{j\omega x_0}\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right) - e^{-j\omega x_0}\left(\frac{1}{j\omega} + \pi\delta(\omega)\right) = 2x_0\, sinc(\omega x_0)$$

d) Función sinc:

por simetría (Dualidad) $\quad F(x) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi f(-\omega)$

por lo tanto $\quad \frac{\omega_0}{\pi} sinc(x\omega_0) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} rect_{\omega_0}(\omega)$

e) Función constante $\quad 1 \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega)$ (Por dualidad y transf. Delta Dirac)

f) Función exponencial $\quad$ como $f(x)\, e^{j\omega_0 x} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} F(\omega - \omega_0)$

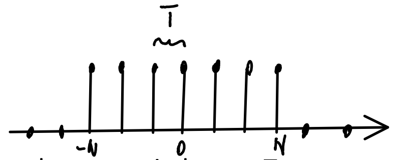
entonces $\quad e^{j\omega_0 x} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

Para el caso del coseno

$$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{j\theta} + e^{-j\theta}\right) \ :\ \cos\omega_0 x \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \pi\left(\delta(\omega - \omega_0) + \delta(\omega + \omega_0)\right)$$

Y del seno $\quad sen\,\theta = \frac{1}{2j}\left(e^{j\theta} - e^{-j\theta}\right) \ :\ sen\,\omega_0 x \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{\pi}{j}\left(\delta(\omega - \omega_0) - \delta(\omega + \omega_0)\right)$

g) Tren de pulsos



Si se tiene un tren de 2N+1 pulsos

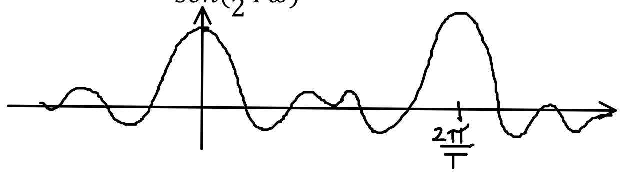
2N+1 pulsos espaciados en T

$$\delta_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} \delta(x + nT)$$

$$\updownarrow$$

$$D_N(\omega) = \sum_{n=-N}^{N} e^{jn\omega T} = \sum_{n=-N}^{N} \left(e^{j\omega T}\right)^n = e^{-jN\omega T}\, \frac{1 - e^{j(2N+1)\omega T}}{1 - e^{j\omega T}}$$

$$D_N(\omega) = \frac{sen\left\{\left(N + \frac{1}{2}\right)T\omega\right\}}{sen\left(\frac{1}{2}T\omega\right)}$$



Caso límite N $\rightarrow \infty$

$$\bar{\delta}(x) = \lim_{N\to\infty} \delta_N(x)$$

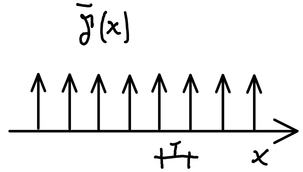
Tren de pulsos infinito con espaciamiento T

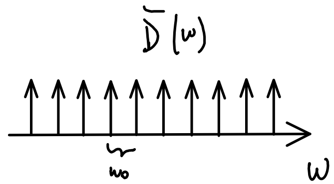
$$\updownarrow$$

$$\bar{D}(\omega) = \lim_{N\to\infty} D_N(\omega) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(\omega - n\omega_0)$$

Tren de pulsos $\omega_0 = 2\pi/T$

$$\bar{\delta}(x) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \bar{D}(\omega)$$





1.7 Series de Fourier y Transformación Discreta de Fourier

1.7.1 Series de Fourier

Al definir una serie de Forier como $\bar{f}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k e^{jk\omega_0 x}$,
siendo una función compleja $\bar{f}: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $\quad c_k \in \mathbb{C}$. El espacio de $\bar{f}$ es el de las funciones periódicas, cuyo período es $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Ocurre que si tenemos el par de Fourier $\quad f(x) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} F(\omega)$

Entonces la relación será

$C_k = \frac{2\pi}{T} F(k\omega_o)$ $\qquad$ y $\qquad$ $\bar{f}(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+nT)$

Por esta razón, al utilizar versiones discretas en el espacio de Fourier, en el espacio de la función original, ésta es periódica.

Volviendo al problema del tren de pulsos, si tenemos una función continua que es aperiódica $f_0(x) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} F_0(\omega)$, la versión periodizada $\bar{f}$ se puede obtener como

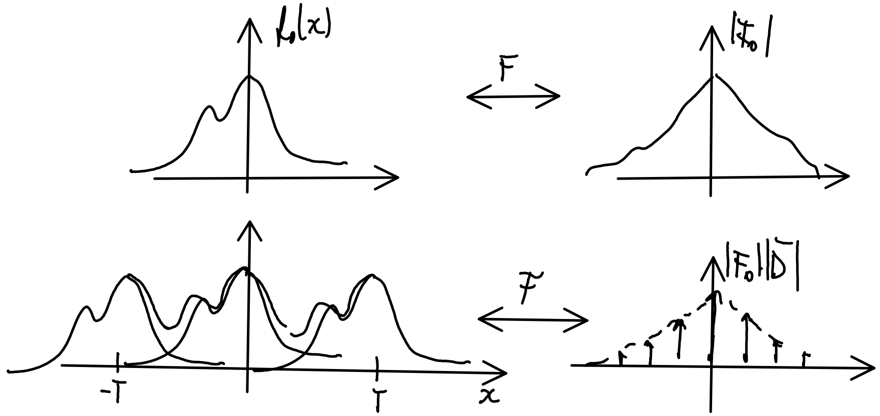
$$\bar{f}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_0(x+nT) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\zeta)\, \delta(x+nT-\zeta)\, d\zeta$$

$$\bar{f}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(\zeta)\, \bar{\delta}(x-\zeta)\, d\zeta = f_0 \circledast \bar{\delta}(x)$$

$$\updownarrow F$$

$$\bar{F}(\omega) = F_0(\omega) \cdot \bar{D}(\omega) \leftarrow$$

Discretización en la frecuencia



Pues hay que aplicar la propiedad de Fourier de

$f_1(x) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} F_1(\omega)$
$f_2(x) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} F_2(\omega)$

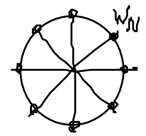
$$f_1 \circledast f_2(x) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} F_1(\omega)\; F_2(\omega)$$

1.7.2 De las series de Fourier a la Transformada Discreta de Fourier

Si consideramos $\bar{f}(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k e^{jk\omega_0 x}$
y siendo N un entero arbitrario. Definimos $T_1 = {}^{T}/_{N}$, para discretizar *x*

$$\bar{f}(mT_1) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k e^{jk\omega_0 m T_1} = \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k W_N^{km}, \quad W_N = e^{j\omega_0 T_1} = e^{j2\pi/N}$$

Donde se periodiza en frecuencia ω y se tiene la discretización del círculo unitario (en el espacio ℂ)



W_N es la enésima raíz de 1, y puede ser escrita como $k = n + r\,N$
con $r \in \mathbb{Z}$ y n∈ [0, N- 1], por lo que $\quad W_N^{km} = W_N^{nm} \cancel{W_N^{Nrm}} = W_N^{nm}$

Por lo tanto

$$\bar{f}(mT_1) = \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} C_{n+rN}\, W_N^{nm} = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nm} \Big(\underbrace{\sum_{r\in\mathbb{Z}} C_{n+rN}} \Big)$$

$$= \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nm}\, \bar{C}_n \leftarrow$$

Coeficientes con aliasing

$$\bar{f}(mT_1) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{F}(n\omega_0)\, W_N^{nm}, \quad W_N = e^{j2\pi/N}, \quad m = 0, \dots, N-1$$

Teorema fundamental con $\quad T_1 = T/N,\ \omega_0 = 2\pi/T \Rightarrow \omega_1 = N\omega_0$

$$\bar{f}(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f(x+nT) \qquad \text{y} \qquad \bar{F}(\omega) = \sum_{m\in\mathbb{Z}} F(\omega + m\,\omega_1)$$

y utilizando $\overline{c_n} = \bar{f}(nT_1)$, $\overline{C_k} = \bar{F}(kT)$

La transformación discreta de Fourier es $\quad \bar{C}_k = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{c}_n\, W_N^{-nk}$

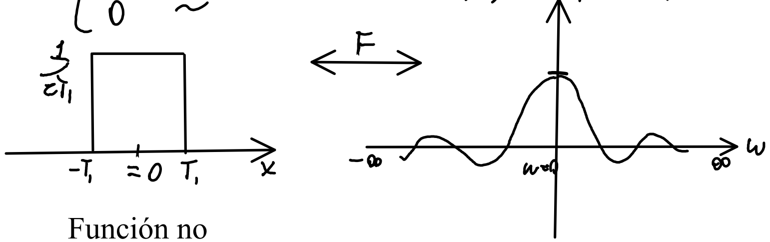
DFT

y la transformación inversa $\quad \bar{c}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{C}_k\, W_N^{nk}$

1.7.3 Ejemplo pulso cuadrado

$$h(x)=\begin{cases}\frac{1}{2T_1} & |x|<T_1\\ 0 & \sim\end{cases}$$

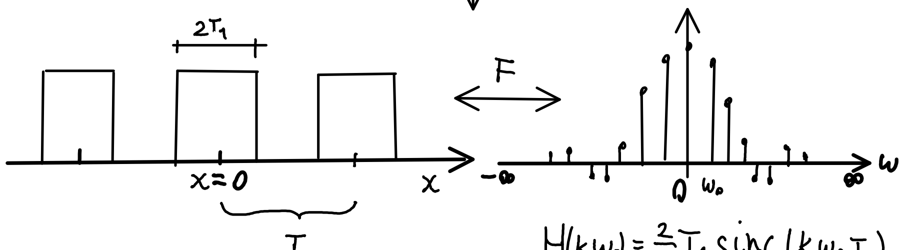
$$H(\omega)=2T_1\,\mathrm{sinc}(\omega T_1)$$



Función no periódica

Series Fourier

Muestreo (discretización frecuencia)



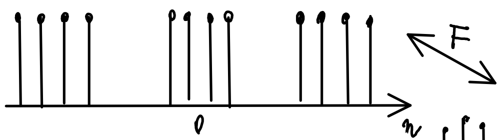
$$H(k\omega_0)=\frac{2}{T}T_1\,\mathrm{sinc}(k\omega_0 T_1)$$

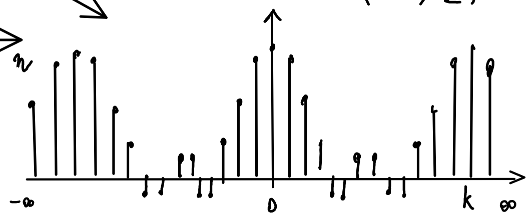
$$\omega_0=\frac{2\pi}{T}$$

Función periódica (serie de Fourier)

Muestreo (discretización tiempo)

$$\tilde{H}(k\Omega_0)=\frac{2}{T}\frac{\sin(k\Omega_0 N_1+\frac{1}{2})}{\sin(k\Omega_0/2)}$$

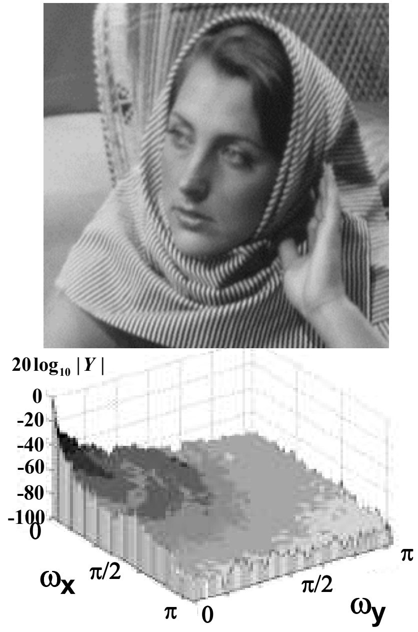




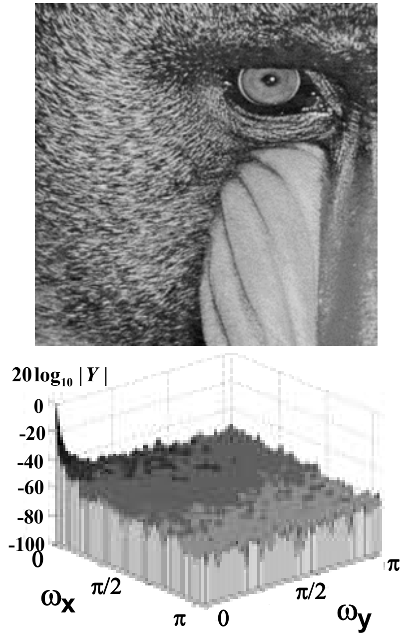
Función discreta periódica (serie discreta de Fourier)

1.7.4 Ejemplos de la serie de Fourier

- Características de amplitud de algunas imágenes 2D



(a) Barbara

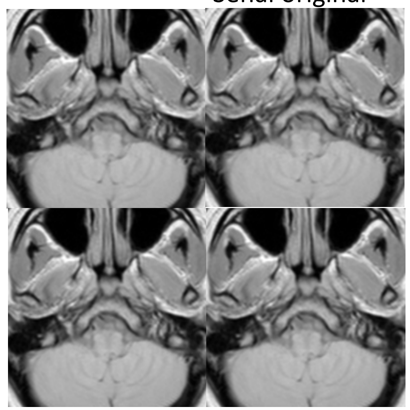


(b) Baboon

- Periodicidad de la función representada por series de Fourier

Por lo tanto, al obtener la transformada de Fourier de un segmento de la imagen, hay que considerar que esta imagen es periódica

Señal original



Transformación de Fourier 2D