

2. Procesamiento Digital

Una formulación general para las series de Fourier es

$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi_k(x)$$

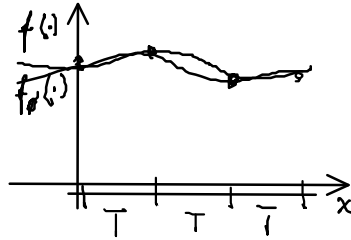
donde se utiliza otro tipo de función ϕ_k diferente a las funciones sinusoidales.

2.1 Interpolación

Se puede expresar una función continua en términos de valores equiespaciados (shift-invariant space)

$$f_\phi(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \phi\left(\frac{1}{T}(x - kT)\right)$$

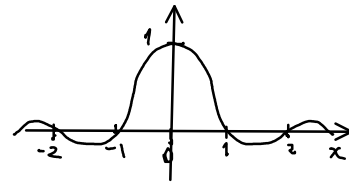
$f_\phi(\cdot)$ es la función interpoladora
 $\phi(\cdot)$ es la función base que interpola



Condición para la función base interpoladora (función cardinal)

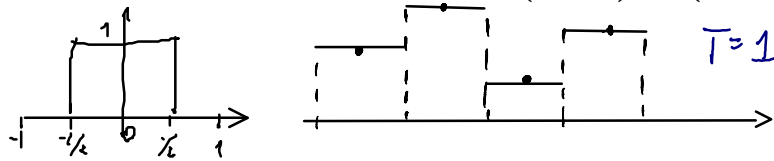
$$\phi(nT) = \delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Ejemplo: si $\phi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ $\swarrow \frac{1}{T} = \frac{1}{1}$



Otra posibilidad: interpolación con funciones B-spline

Vecino más cercano: $\phi(x) = \text{rect}_{1/2}(x) = u(x + 1/2) - u(x - 1/2)$

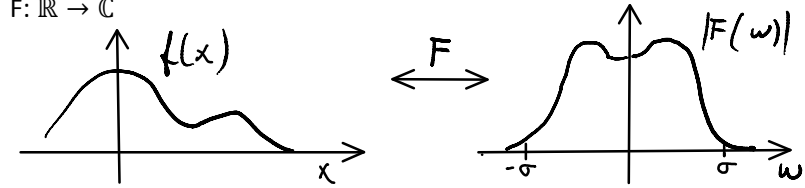


Interpolación lineal: $\phi(x) = \text{Triang}_1(x) = \begin{cases} 1+x & -1 < x < 0 \\ 1-x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$

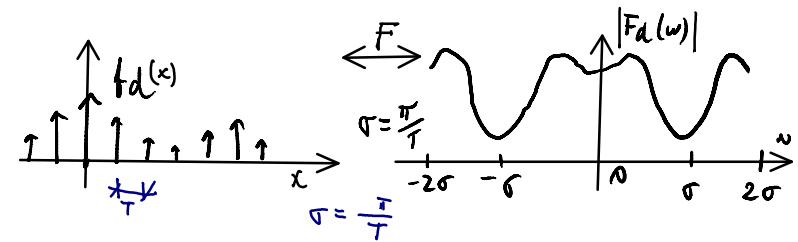


2.2 Muestreo o discretización

Supongamos que se tiene una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y su transformación de Fourier $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$



Al multiplicar la función f por un tren de pulsos, se genera una función f_d , la transformación de Fourier F_d , es la convolución de $F(w)$ con un tren de pulsos. Pues la transformación de un tren de pulsos es un tren de pulsos, y la transformación de Fourier de una multiplicación de 2 funciones es la convolución de la transformación de Fourier cada una de esas funciones

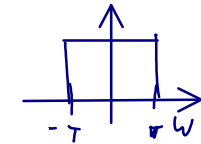


$$f_d(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \delta(x - nT) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_d(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) e^{-jnT\omega} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(\omega + 2n\sigma)$$

Sin embargo: $f_\phi(t) = f_d \otimes \phi(t)$

Porque $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \delta(x - nT) \otimes \phi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_\phi(\omega) = F_d(\omega) \cdot \Phi(\omega) = \Phi(\omega) \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(\omega + 2n\sigma)$

Si $\phi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \xrightarrow{\mathcal{F}} \Phi(\omega) = \text{rect}_{2\pi}(\omega)$



Por ejemplo: $\phi(x) = \text{Triang}_1(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{4 \sin^2(\frac{\omega T}{2})}{T^2 \omega^2}$

2.3 Teorema del Muestreo

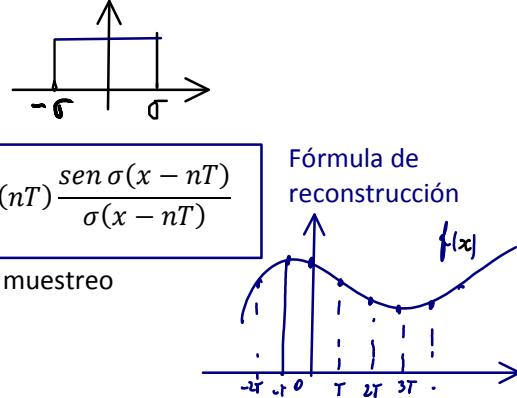
Sea $f(t)$ es una función de energía finita y σ -BL ($F(\omega) = 0$ para $|\omega| > \sigma$). Entonces, ocurre que $F_d(\omega) = F(\omega)$ para $|\omega| < \sigma$

Por lo tanto $F(\omega) = F_d(\omega) \cdot \text{Rect}_\sigma(\omega) \quad \forall \omega$

Como $\phi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} \text{Rect}_\sigma(\omega)$

Finalmente
$$f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \frac{\sin \sigma(x - nT)}{\sigma(x - nT)}$$
 Fórmula de reconstrucción

con $\sigma = \pi/T$ la frecuencia de muestreo o Nyquist



2.3.1 Interpolación de banda limitada

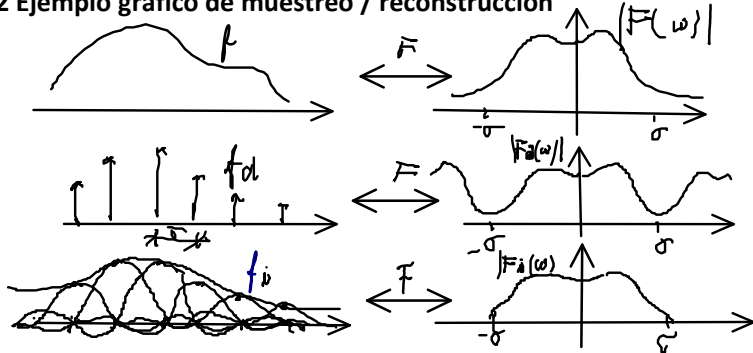
Dada una función $f(x)$ y una constante T , $\sigma = \pi/T$

$$f_i(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \frac{\sin \sigma(x - nT)}{\sigma(x - nT)} \xleftrightarrow{\mathcal{F}} F_i(\omega) = F_d(\omega) \cdot \text{Rect}_\sigma(\omega)$$

Por lo que $f_i(x)$ se obtiene al aplicar un filtro pasa-bajos ideal a $f_d(\cdot)$, por lo que $f_i(x)$ es σ -BL. El error puntual es $f(x) - f_i(x) = 0$, para $x = nT$

y se puede demostrar que $|f(x) - f_i(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{|\omega| > \sigma} |F(\omega)| d\omega$

2.3.2 Ejemplo gráfico de muestreo / reconstrucción



2.4. Transformada de Fourier en tiempo discreto

Recordando que con el tren de pulsos $\bar{D}(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(\omega - n\omega_0)$, $\omega_0 = 2\pi/T$

$$F_d(\omega) = \bar{D} \otimes F(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(\omega) * \delta(\omega - n\omega_0) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(\omega - n\omega_0)$$

Y que, por otro lado, $F_d(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) e^{-jnT\omega} = \bar{F}(\Omega)$, $\Omega = T\omega$

Tenemos que $\bar{F}(\Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(\frac{1}{T}(\Omega - n2\pi))$ es periódica en 2π

con $\Omega = T\omega$ la frecuencia de la señal discreta.

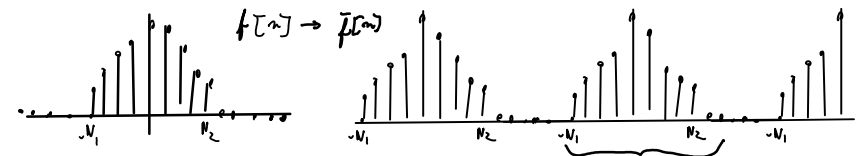
De esta forma, la transformada de Fourier de una señal discreta será

$$\bar{F}(\Omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(n) e^{-jn\Omega}$$

2.5 De la Transformada de Fourier de señales discretas a la Transformada Discreta de Fourier

Una señal discreta f se puede periodizar mediante

$$\bar{f}[n] = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f[n + Nk]$$



Tenemos
$$\bar{f}[n] = \sum_{k \in \langle N \rangle} \bar{c}_k e^{jk \frac{2\pi}{N} n} = \sum_{k \in \langle N \rangle} \bar{c}_k W_N^{kn}$$

y la inversa
$$\bar{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} \bar{f}[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n} = \frac{1}{N} \sum_{n \in \langle N \rangle} \bar{f}[n] W_N^{-kn}$$

Para un intervalo de

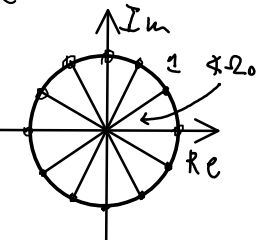
periodo $\langle N \rangle$ (cerca del origen)

$$\bar{f}[n] = f[n]$$

$$\bar{c}_k = \frac{1}{N} \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-jk \frac{2\pi}{N} n}$$

Pero definiendo $\bar{F}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-j\Omega n}$

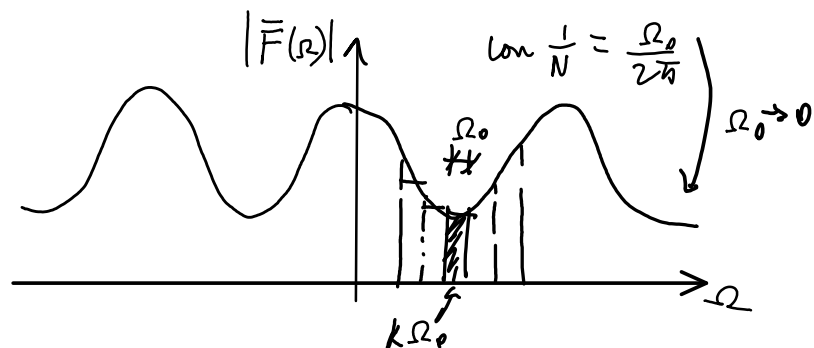
Por lo tanto $\bar{C}_k = \frac{1}{N} \bar{F}(k\Omega_0)$ $\Omega_0 = \frac{2\pi}{N}$



$$\therefore \bar{f}[n] = \sum_{k=\langle N \rangle} \frac{1}{N} \bar{F}(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n}$$

Finalmente

$$\bar{f}[n] = \frac{1}{2\pi} \sum_{k=\langle N \rangle} \bar{F}(k\Omega_0) e^{jk\Omega_0 n} \cdot \Omega_0$$



Discretización de la Transf. de Fourier (periodización de la señal)

Tenemos que la transformación de Fourier de una señal discreta será

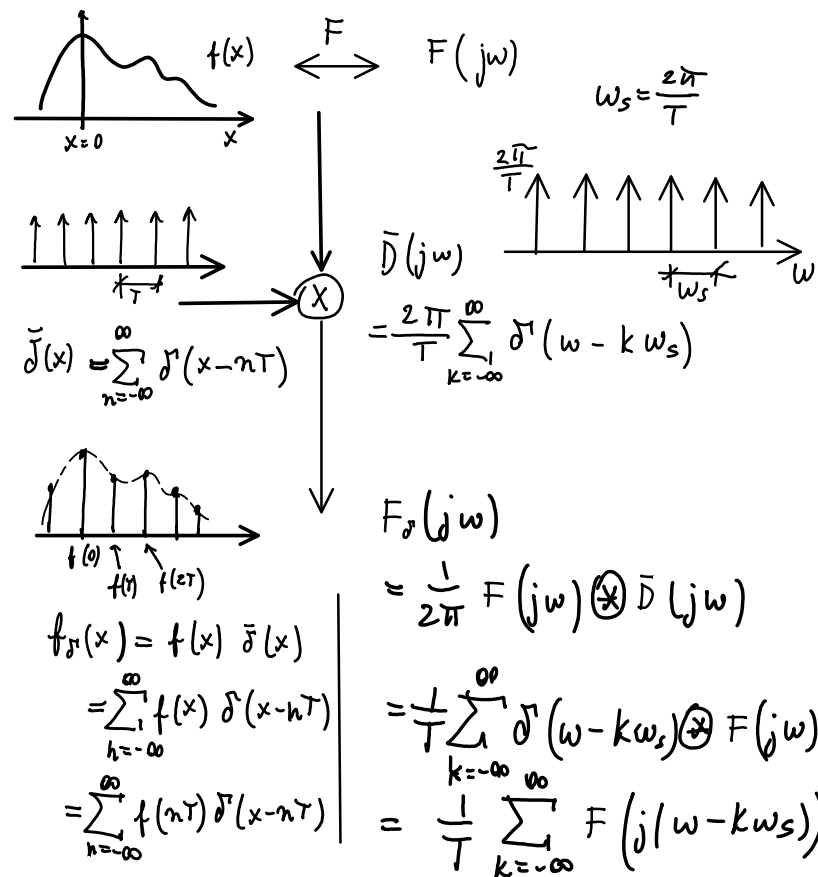
$$\bar{F}(\Omega) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f[n] e^{-j\Omega n}$$

$$f[n] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \bar{F}(\Omega) e^{j\Omega n} d\Omega$$

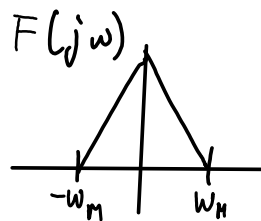
2.6 Ejemplo de Muestreo y Aliasing

Teorema del muestreo

La transformada de Fourier es



Condiciones para que ocurra Aliasing



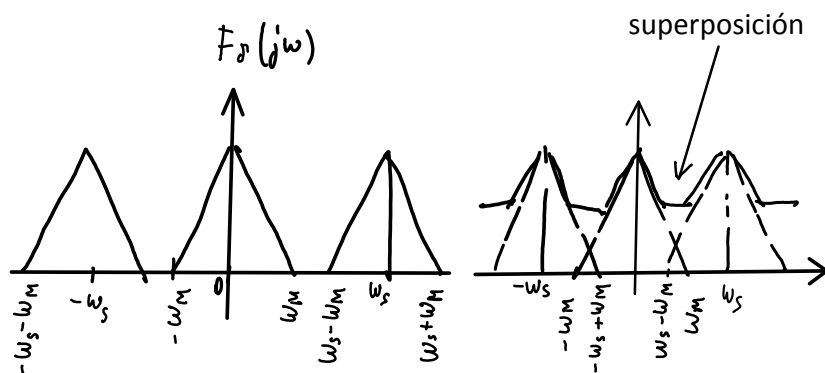
Por Teorema del muestreo

Sin Aliasing

$$\omega_s > 2\omega_M$$

Con Aliasing

$$\omega_s < 2\omega_M$$



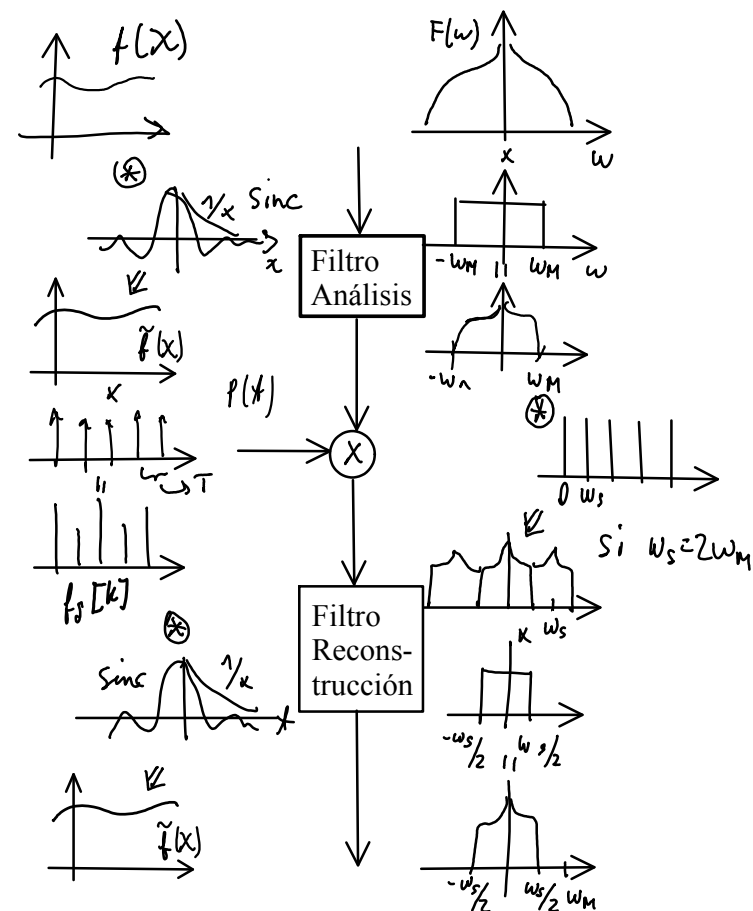
"aliasing": una superposición en frecuencia

$$\omega_s - \omega_M < \omega_M$$

$$\Rightarrow \omega_s < 2\omega_M$$

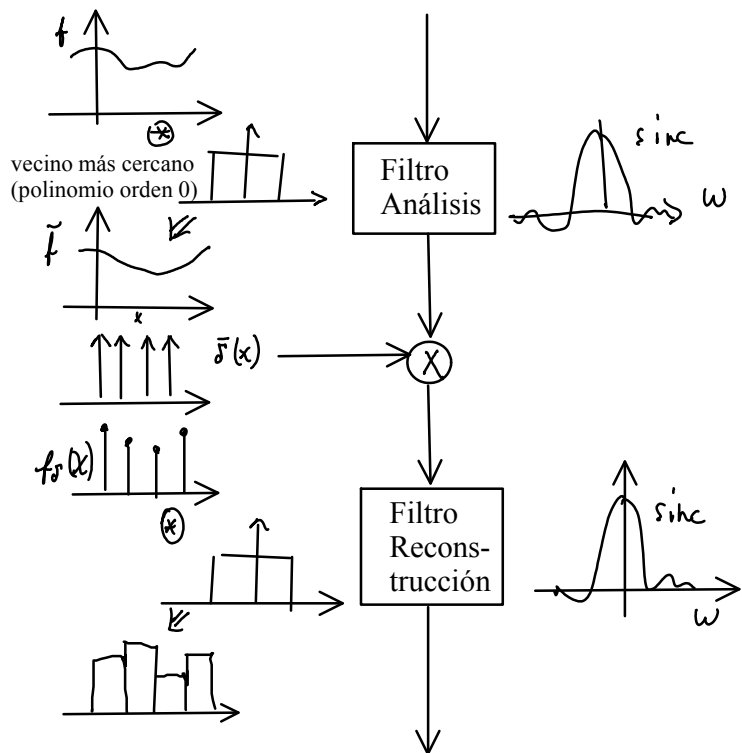
2.7 Diferentes Reconstrucciones

El esquema completo para el caso ideal, utiliza un filtro pasa-bajos ideal donde la reconstrucción sería

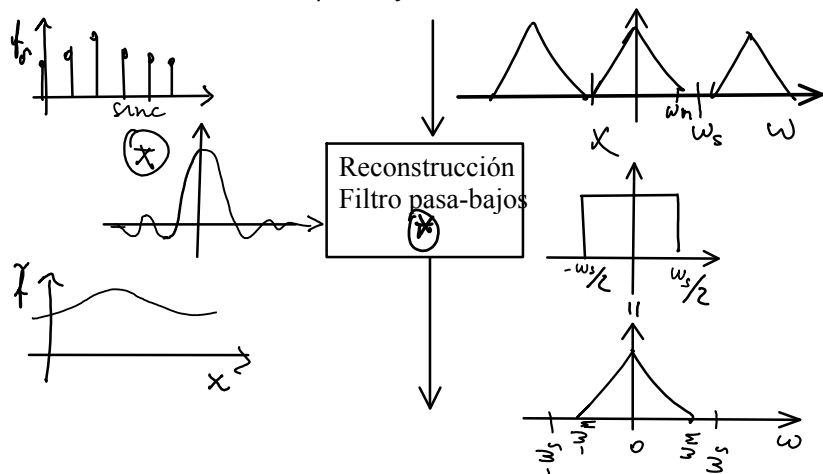


ω_s : frecuencia de Nyquist

El esquema completo para el caso discretización continua a trazos, utiliza un filtro sinc donde la reconstrucción sería



Recordando el caso del filtro pasabajos ideal, la reconstrucción sería



2.8 Representación de señales análogas mediante imágenes digitales

2.8.1 Espacios invariantes a la traslación entera

Tenemos un espacio generado por la traslación y el escalamiento de una función ϕ

$$f(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c[l] \phi(x-l)$$

Al tener valores discretos $y[k]$, se puede interpolar estos valores mediante la relación

$$\vec{y} = \mathbf{C} \vec{c}$$

$$y[k] = f(x)_{x=k}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y[k] = \sum_{l \in \mathbb{Z}} C[l] \phi(k-l)$$

$$\text{Sea } p[l] = \phi(l), l \in \mathbb{Z} \Rightarrow y[k] = C * p[k]$$

$$C[l] = (p^{-1}) * y[l]$$

Si queremos encontrar el kernel (función base) que interpola los valores $y[k]$, podemos expresarlo en términos del espacio generado por la traslación de la función ϕ

$$n(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} q[l] \phi(x-l)$$

Para que sea una función interpoladora $n(x)_{x=k} = \delta^i[k]$

$$\text{Por lo tanto } q[k] = (p^{-1})[k]$$

$$\text{y la func. cardinal } n(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (p^{-1})[l] \phi(x-l)$$

$$(p^{-1}) * p[k] = \delta[k]$$



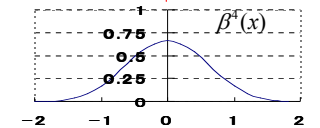
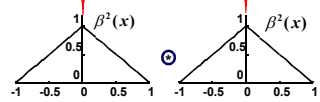
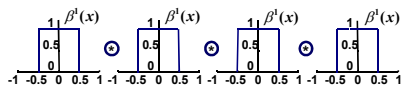
2.8.2 Cálculo de B-splines

Propiedades generales

$$\int_{x \in \mathbb{R}} \beta^n(x - \ell) = 1$$

$$\beta^n \in C^{n-2}(\mathbb{R})$$

$$\partial \beta^n / \partial x = \beta^{n-1}(x + 1/2) - \beta^{n-1}(x - 1/2)$$

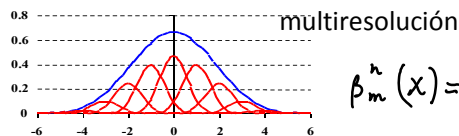


$$\beta^4(x) = (\beta^1 \otimes \beta^1 \otimes \beta^1 \otimes \beta^1)(x)$$

$$\beta^1(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{1}{2} \\ 0, & \sim \end{cases} \in C^{-1}$$

$$\beta^2(x) = \begin{cases} 1 - |x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & \sim \end{cases} \in C^0$$

$$\beta^4(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - x^2 + \frac{1}{2}|x|^3, & |x| < 1 \\ \frac{1}{6}(2 - |x|)^3, & 1 \leq |x| < 2 \\ 0, & |x| \geq 2 \end{cases} \in C^2$$

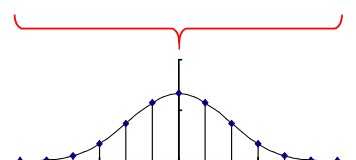
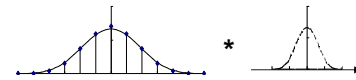
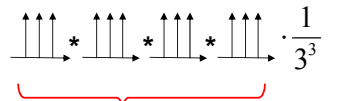


Propiedades de aproximación

$$\sum_{\ell \in \mathbb{Z}} \beta(x - \ell) = 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

$$\text{Error}(f, \tilde{f}) \propto \kappa_\varphi \cdot T^L, \quad \text{con } T \rightarrow 0$$

T: intervalo de muestreo, L: potencia de aprox



$$b_m^4[k] = \frac{1}{m^3} (b_m^1 * b_m^1 * b_m^1 * b_m^1) * b_1^4[k]$$

$$b_m^1[k] = \begin{cases} 1, & 0 \leq k < m \\ 0, & \sim \end{cases}$$

$$b_m^n[k] = \beta^n(x/m) /_{x=k}$$

$$k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$$

n veces

$$\frac{1}{n^{(n-1)}} b_m^1 * b_m^1 * \dots * b_m^1 * b_m^1$$

$$\beta_m^n(x) = \beta^n\left(\frac{x}{m}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} u_m^n[k] \beta^n(x - k)$$

2.8.3 Ejemplo de wavelets con B-spline

La descomposición por wavelets se basa en filtros pasa-bajos y filtros pasa-altos que se aplican en forma progresiva y que se basan en funciones de soporte local

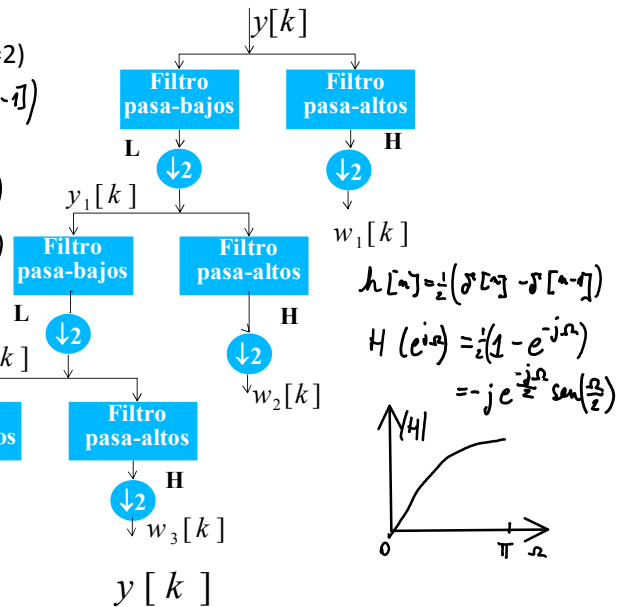
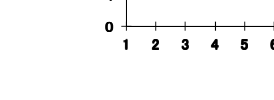
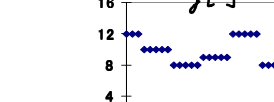
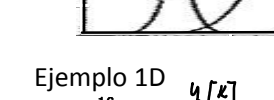
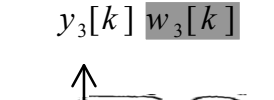
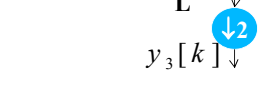
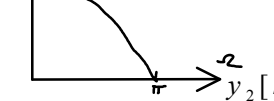
Ejemplo Haar Wavelet

media móvil(ancho m=2)

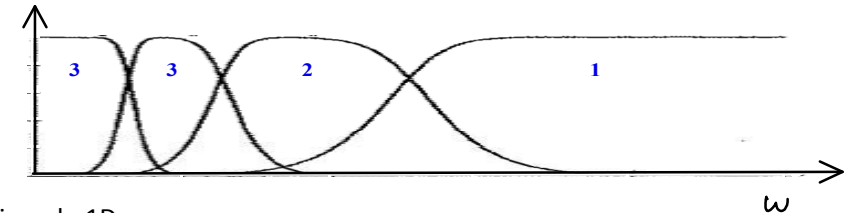
$$\mathcal{L}[n] = \frac{1}{2} (\delta[n] + \delta[n-1])$$

$$\mathcal{L}(e^{j\omega}) = \frac{1}{2} (1 + e^{j\omega})$$

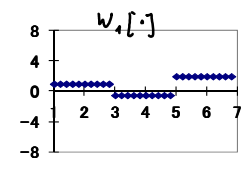
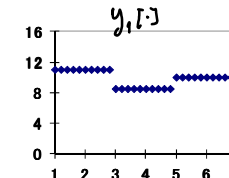
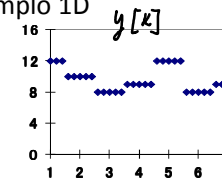
$$|\mathcal{L}| = e^{j\frac{\omega}{2}} \cos\left(\frac{\omega}{2}\right)$$



$$y_3[k] \quad w_3[k] \quad w_2[k] \quad w_1[k]$$

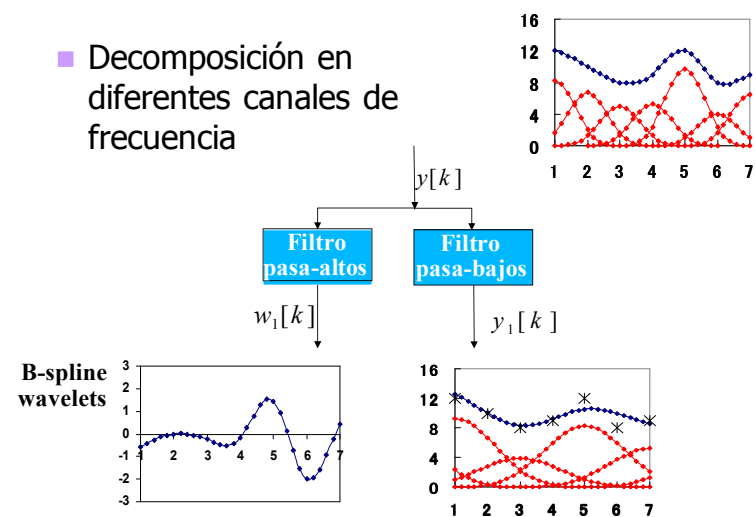


Ejemplo 1D



2.8.4 Ejemplo Wavelet con B-spline de orden mayor

■ **Decomposición en diferentes canales de frecuencia**



Ejemplo 2D Haar Wavelet:

