

3. Procesamiento Digital de Imágenes

3.1 Transformada discreta de Fourier en 2D

Una señal periódica con períodos N_1 y N_2 en sus coordenadas x_1 y x_2 , respectivamente, tiene una transformada de Fourier definida como

$$\bar{F}[k_1, k_2] = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \bar{f}[n_1, n_2] W_{N_1}^{-k_1 n_1} W_{N_2}^{-k_2 n_2}$$

y una transformada inversa

$$\bar{f}[n_1, n_2] = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \bar{F}[k_1, k_2] W_{N_1}^{k_1 n_1} W_{N_2}^{k_2 n_2}$$

3.2 Convoluciones discretas en 2D

Una convolución discreta en 2D se puede definir como

$$f_1 * f_2[n_1, n_2] = \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} f_1[k_1, k_2] f_2[n_1 - k_1, n_2 - k_2]$$

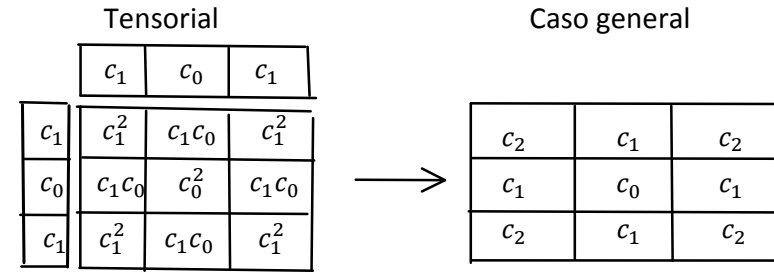
Si f_2 es un filtro separable de manera que el cálculo de la convolución se reduce a $f_2[n_1, n_2] = f_{21}[n_1] \cdot f_{22}[n_2]$

$$f_1 * f_2[n_1, n_2] = \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} f_{22}[n_2 - k_2] \left\{ \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} f_1[k_1, k_2] f_{21}[n_1 - k_1] \right\}$$

Lo que significa que la convolución se puede calcular primero a lo largo de las filas y luego a lo largo de las columnas en forma consecutiva (en cascada). A este tipo de funciones las denominaremos funciones de producto tensorial.

Notar que en el caso de las transformadas de Fourier tanto discretas como continuas, el cálculo siempre se puede aplicar en a lo largo de las filas y luego a lo largo de las columnas en forma consecutiva. En el caso de los filtros en 2D solamente los filtros que se pueden descomponer en producto tensorial pueden ser calculados en forma independiente.

3.3 Ejemplo de funciones de máscara en 2D (soporte compacto)



Las máscaras son simétricas de modo que la fase de éstas sea cero o sea lineal.

Si se tiene una función desplazada y si

$$f[n_1, n_2] \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{F}[k_1, k_2] = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} f[n_1, n_2] W_{N_1}^{-k_1 n_1} W_{N_2}^{-k_2 n_2} \in \mathbb{R}$$

Entonces tiene fase cero: $\angle \hat{F}[k_1, k_2] = 0$

y cualquier función trasladada

$$f[n_1 - m_1, n_2 - m_2] \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{F}[k_1, k_2] \underbrace{W_{N_1}^{k_1 m_1} W_{N_2}^{k_2 m_2}}_{\text{Fase lineal en } k_1 \text{ y } k_2}$$

Pues tenemos que $\angle W_{N_1}^{k_1 m_1} = (2\pi k_1 m_1)/N_1$ y $\angle W_{N_2}^{k_2 m_2} = (2\pi k_2 m_2)/N_2$ son funciones lineales en k_1 y k_2 , respectivamente

Por otro lado, $|W_{N_1}^{k_1 m_1}| = 1$, $|W_{N_2}^{k_2 m_2}| = 1$

Recordar que en 1D, si $\angle F(k) = 0$, entonces $f[n]$ es función par



Para hacer un análisis de los filtros, conviene utilizar la transformada de Fourier de señales discretas será:

$$\hat{F}(\Omega_1, \Omega_2) = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} f[n_1, n_2] e^{-j\Omega_1 n_1} e^{-j\Omega_2 n_2}$$

Que es una función periódica con período 2π

Es deseable tener filtros $h()$ lo más isotrópicos (simetría circular, invariantes ante la traslación), porque si la imagen es obtenida en forma rotada, lo ideal es que el filtro no privilegie en especial ninguna orientación.

3.4 Generalizando las respuestas de frecuencia

Si se tiene una señal en el espacio de Fourier

Recordar la propiedad

$$f_1 \otimes f_2(x) \xleftrightarrow{F} F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

Filtro pasabajos

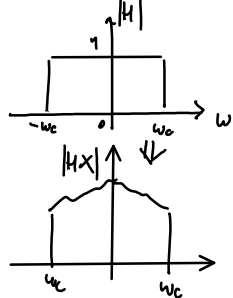
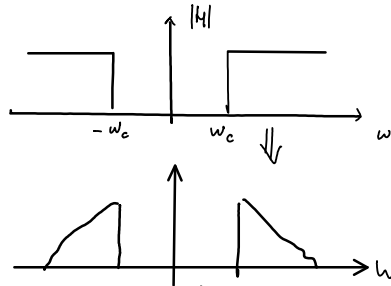


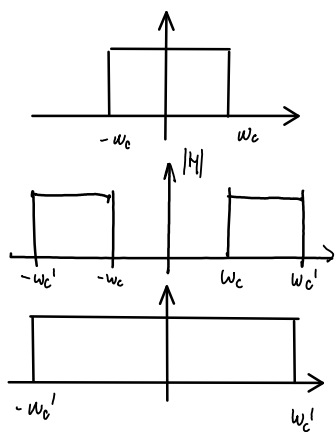
Imagen original



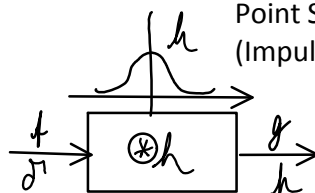
Filtro pasa-altos



Otro filtro: pasabanda



Point Spread Function (Impulse Response)



Inverse function

$$h^+ \otimes h = \delta^+$$

Una forma de generar un filtro pasa-bajos

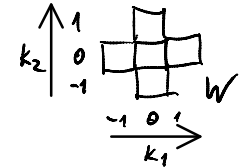
$$h_{HP}(x) = \delta^+(x) - h_{LP}(x) \iff H_{HP}(\omega) = 1 - H_{LP}(\omega)$$

3.5 Filtrado de imágenes - Operaciones espaciales

3.5.1 Filtro de Media: un filtro de media se puede definir como

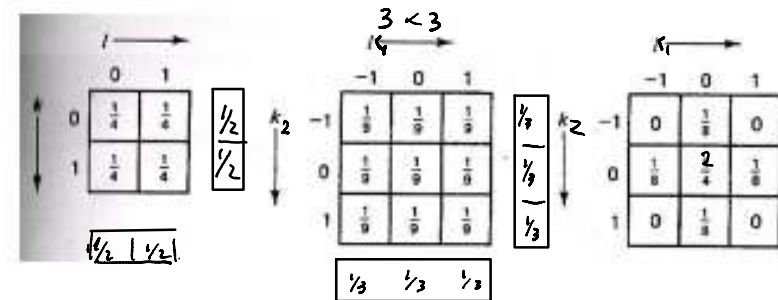
$$v(n_1, n_2) = \frac{1}{N_W} \sum_{(k_1, k_2) \in W} f(n_1 - k_1, n_2 - k_2) \quad N_W = 5$$

donde W es la región de la ventana donde el proceso es equivalente a una media móvil, siendo un caso específico de filtro pasa-bajos.



3.5.2 Filtros pasa-bajos: Recordemos que una máscara (filtro) se aplica según

$$v(n_1, n_2) = \sum_{(k_1, k_2) \in W} c[k_1, k_2] f[n_1 - k_1, n_2 - k_2]$$

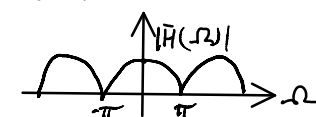


Caso 1D

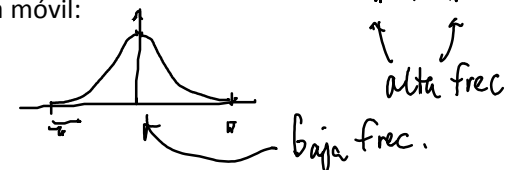
Respuesta de frecuencia:

$$\bar{H}(\Omega) = (2c_0 \cos \Omega + c_0)$$

Ejemplo $c_0 = 0$



Ejemplo media móvil:
 $c_0 = c_1 = 1/3$



Caso 2D

1. Producto tensorial 3x3

	c_1	c_0	c_1
c_1	c_1^2	$c_1 c_0$	c_1^2
c_0	$c_1 c_0$	c_0^2	$c_1 c_0$
c_1	c_1^2	$c_1 c_0$	c_1^2

$$H(\Omega_1, \Omega_2) = (2c_1 \cos \Omega_1 + c_0) \cdot (2c_1 \cos \Omega_2 + c_0)$$

$$|\Omega_1|, |\Omega_2| \leq \pi$$

es una función periódica

2. Máscara 3x3 Genérica (simétrica)

c_2	c_1	c_2
c_1	c_0	c_1
c_2	c_1	c_2

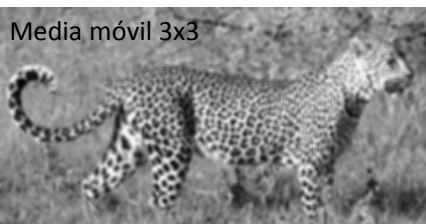
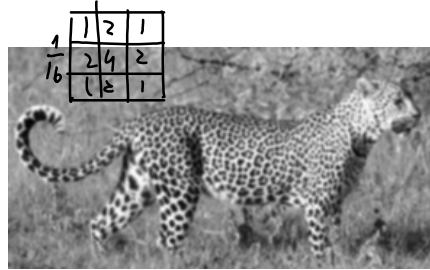
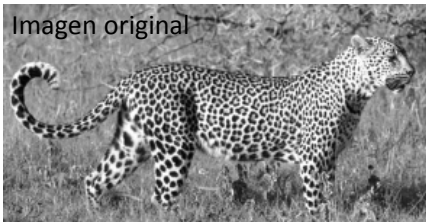
Con la relación de la frecuencia para funciones discretas

$$\Omega_1 = \omega_1 T_1, \quad \Omega_2 = \omega_2 T_2$$

$$\bar{H}(\Omega_1, \Omega_2) = c_0 + c_1(2 \cos \Omega_1 + 2 \cos \Omega_2) + c_2 2 \cos \Omega_1 2 \cos \Omega_2$$

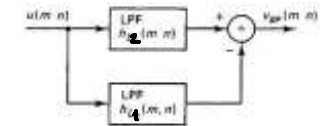
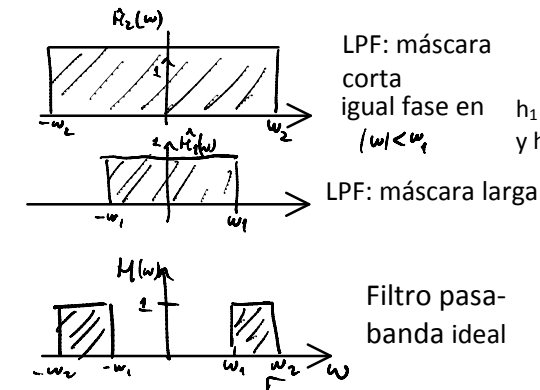
$$= c_0 + 2c_1(\cos \Omega_1 + \cos \Omega_2) + 4c_2 \cos \Omega_1 \cos \Omega_2$$

Ejemplos:

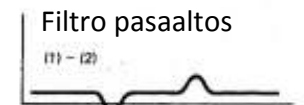
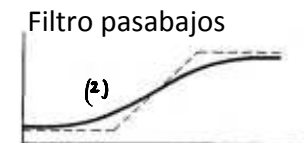
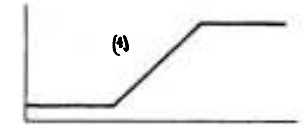


3.6 Otros ejemplos de filtros 2D

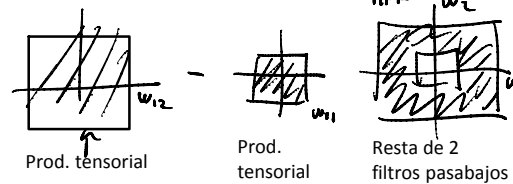
Diferencia de filtros pasa-bajos:



$h_{pb}(\eta_1, \eta_2) = h_2(\eta_1, \eta_2) - h_1(\eta_1, \eta_2)$
 h_1 es típicamente de extensión larga y h_2 es un filtro de extensión corta



En 2D



En general utilizaremos productos tensoriales en los filtros. Hay formas de diseñar respuestas de frecuencia en 1D y extender al en forma radial: Transf. de McLellan

Ejemplos

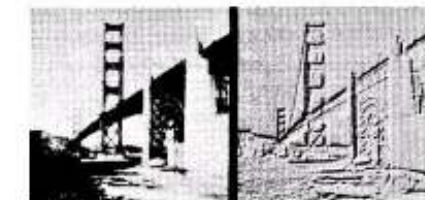
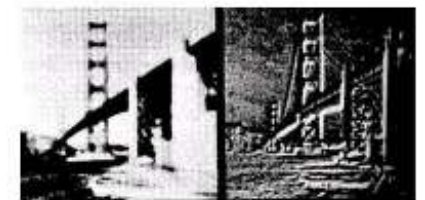


Imagen original con filtro pasa-altos



con filtro pasa-bajos con filtro pasa-banda

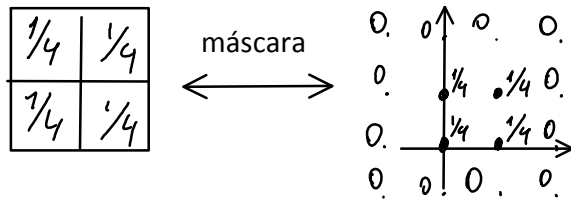
3.7 Filtrado pasa-bajos 2D

$$f[n] \xrightarrow{\mathcal{F}} g[n] \xrightarrow{\mathcal{H}} h[n] \quad \delta[n] = \begin{cases} 1 & n=0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$g[n_1, n_2] = \frac{1}{4} \{ f[n_1, n_2] + f[n_1, n_2-1] + f[n_1-1, n_2] + f[n_1-1, n_2-1] \}$$

$$\text{Si } h[n_1, n_2] = \begin{cases} \frac{1}{4}, & 0 \leq n_1 \leq 1, 0 \leq n_2 \leq 1 \\ 0, & \sim \end{cases}$$

$$g[n_1, n_2] = h * f[n_1, n_2] = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} h[n_1 - k_1, n_2 - k_2] f[k_1, k_2]$$



$$h[n_1, n_2] = \frac{1}{4} \{ \delta[n_1, n_2] + \delta[n_1, n_2-1] + \delta[n_1-1, n_2] + \delta[n_1-1, n_2-1] \}$$

$$\begin{aligned} \bar{H}(\Omega_1, \Omega_2) &= \frac{1}{4} (1 + e^{-j\Omega_2} + e^{-j\Omega_1} + e^{j(\Omega_1 + \Omega_2)}) \\ &= \frac{1}{4} (1 + e^{-j\Omega_2})(1 + e^{-j\Omega_1}) \\ &= e^{-j(\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2})} \cos\left(\frac{\Omega_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\Omega_2}{2}\right) \end{aligned}$$

Amplitud

$$|\bar{H}(\Omega_1, \Omega_2)| = \left| \cos\left(\frac{\Omega_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\Omega_2}{2}\right) \right|$$

Fase

$$\angle \bar{H}(\Omega_1, \Omega_2) = -\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}$$

Otros ejemplos 2D

Media móvil
de 3x3

1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9
1/9	1/9	1/9

En general

c_0	c_1	c_2
c_3	c_4	c_5
c_6	c_7	c_8

3.8 Filtrado mediante diferenciación en 2D

Derivadas direccionales, diferencia en

a) Dirección 1: $g[n_1, n_2] = f[n_1, n_2] - f[n_1-1, n_2]$

$$\downarrow f \equiv \delta$$

$$h[n_1, n_2] = \delta[n_1, n_2] - \delta[n_1-1, n_2]$$

b) Dirección 2: $g[n_1, n_2] = f[n_1, n_2] - f[n_1, n_2-1]$

$$\downarrow f \equiv \delta$$

$$h[n_1, n_2] = \delta[n_1, n_2] - \delta[n_1, n_2-1]$$

3.9 Discretización del Laplaciano

Ej.: Doble diferencia (discretización $\frac{d^2 f}{dx^2} = \frac{d}{dx} \left(\frac{df}{dx} \right)$)

$$g[n] = h * (h * f)[n], \quad h[n] = \delta[n] - \delta[n-1]$$

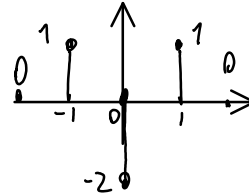
$$= (h * h) * f[n]$$

$$h * h[n] = \delta[n] - 2\delta[n-1] + \delta[n-2]$$

En 2D podemos tener lo mismo:

Máscara en dirección 1

$$\begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \end{bmatrix}$$



Dirección 2 $\frac{d^2 f}{dx_2^2} \rightarrow$

$$\begin{bmatrix} 1 \\ -2 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Sumando las 2 segundas derivadas se tiene el laplaciano:

$$\frac{d^2 f}{dx_1^2} + \frac{d^2 f}{dx_2^2} = \nabla^2 f \Rightarrow$$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

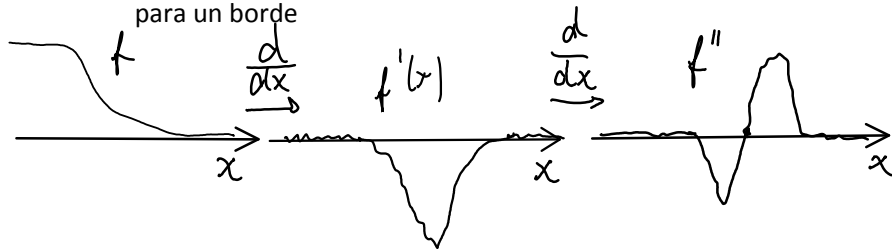
$$\nabla^T \cdot \nabla = \Delta = \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \text{ Laplaciano (escalar)}$$

$$\nabla \nabla^T = \begin{bmatrix} \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} & \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} \\ \frac{\partial^2}{\partial x_1 \partial x_2} & \frac{\partial^2}{\partial x_2^2} \end{bmatrix} \text{ Hessiano (matriz)}$$

Discretización de 1er orden del Laplaciano

Al derivar una vez, se puede encontrar el máximo o mínimo para un borde

Al derivar 2 veces, se puede encontrar los cruces por cero para encontrar un borde



3.10 Ejemplos con imágenes médicas

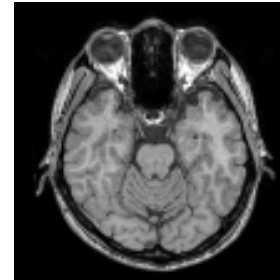
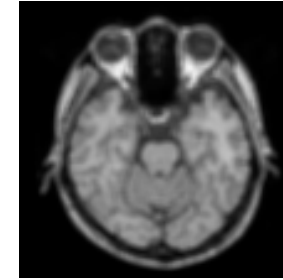


Imagen original



Media móvil 3x3

Filtro pasa-altos



$2 * (\text{Orig} - \text{LPF} 3 \times 3)$

Filtro Laplaciano



Discretización 1er orden



Discretización orden superior

$$h = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$h = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$

3.11 Ejemplo de convolución

Usando la máscara:

$$h[k] = \begin{bmatrix} c_2 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_0 & c_1 \\ c_2 & c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$g[n] = \sum_k f[k] h[n-k]$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

sobre la imagen

$$f[k] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1^{x_1} & 2^{x_1} & 2^{x_1} \\ 5^{x_1} & 4^{x_2} & 3^{x_1} \\ 6^{x_1} & 2^{x_1} & 3^{x_1} \end{bmatrix}$$

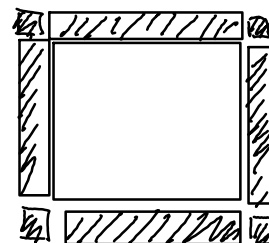
$$\bar{H}(\Omega_1, \Omega_2) = 2 + 2(\cos \Omega_1 + \cos \Omega_2) + 4 \cos \Omega_1 \cos \Omega_2$$

$$g[\cdot] = \begin{bmatrix} & & \\ & 28 & \\ & 32 & \end{bmatrix}$$

Espejo
half-
sample

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Espejo
full-
sample

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$


Hay que rellenar los bordes según
criterio de borde (half-, full-sample)

Otro ejemplo:

$h[\cdot] =$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g[k_1, k_2] = \{ f[k_1-1, k_2] + f[k_1, k_2-1] + f[k_1+1, k_2] + f[k_1, k_2+1] - 4f[k_1, k_2] \}$$

$$f[k] = \begin{bmatrix} 3 & 2 & 4 \\ 1^{x_1} & 2^{x_1} & 2^{x_1} \\ 5^{x_1} & 4^{x_2} & 3^{x_1} \\ 6^{x_1} & 2^{x_1} & 3^{x_1} \end{bmatrix}$$

$$g[\cdot] = \begin{bmatrix} & & \\ & 15 & \\ & 8 & \end{bmatrix}$$