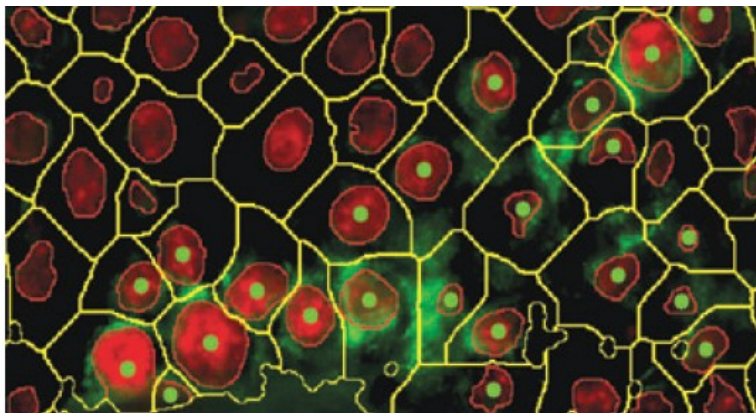


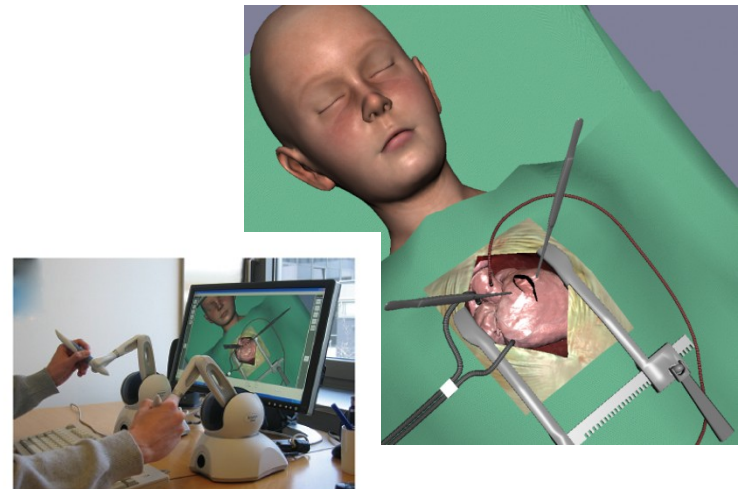
Mallas Geométricas

Sesión 8: Mauricio Cerda

- Se tiene una tinción de núcleos y cáncer en un tejido. ¿Cómo obtener una buena estimación de la ubicación de la membrana plasmática para contar células cancerígenas?
- Se desea simular el comportamiento de un tejido para entrenar a un médico en algún procedimiento. ¿Qué se necesita?



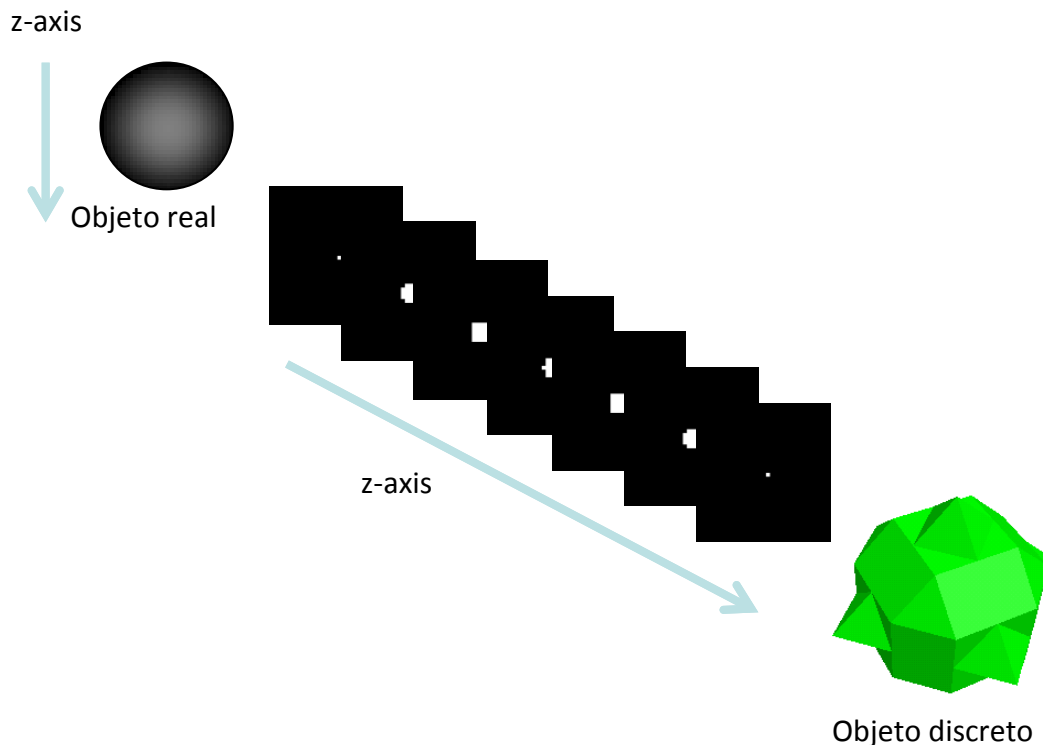
Al-Kofahi et al. 2011. Cell-based quantification of molecular biomarkers in histopathology specimens. Histopathology 59, pp.40-54.



CAVI project, Denmark, 2011.

Luego de realizar la segmentación en 2D/3D:

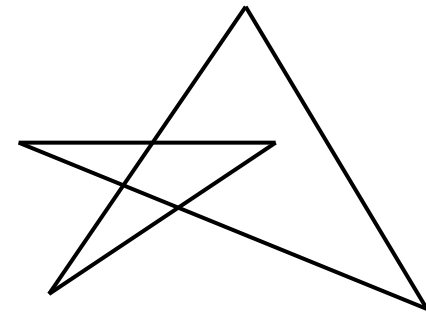
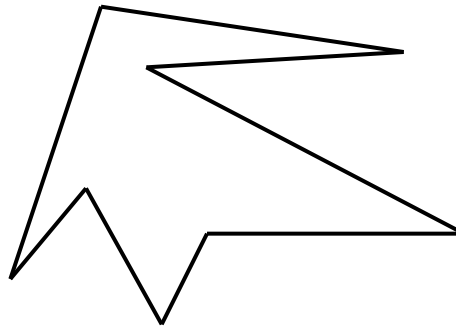
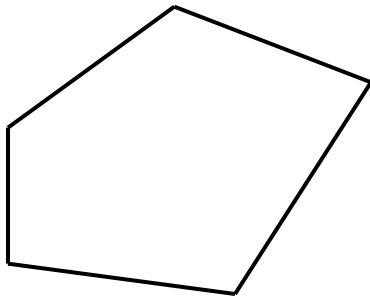
- ¿Cómo construir una representación geométrica de un objeto?
- ¿Como visualizar estas representaciones y destacar algun aspecto de ellas?



1. Envoltura Convexa.
2. Diagrama de voronoi.
3. Triangulación delaunay y dualidad (2D/3D)
4. Visualización y luz.
5. Mallas en microscopía.

- Polígono: región delimitada por segmentos que forman una curva simple cerrada.
- Sean $v_0, v_1, v_2, v_3, \dots, v_{n-1}$ puntos (vértices) en el plano. Sean $e_0 = v_0 - v_1$, $e_1 = v_1 - v_2, \dots, e_{n-1} = v_{n-1} - v_0$ los segmentos (arcos) que conectan los puntos. Se dice que estos segmentos rodean un polígono ssi:
 - La intersección de cada par de segmentos es solo un punto:

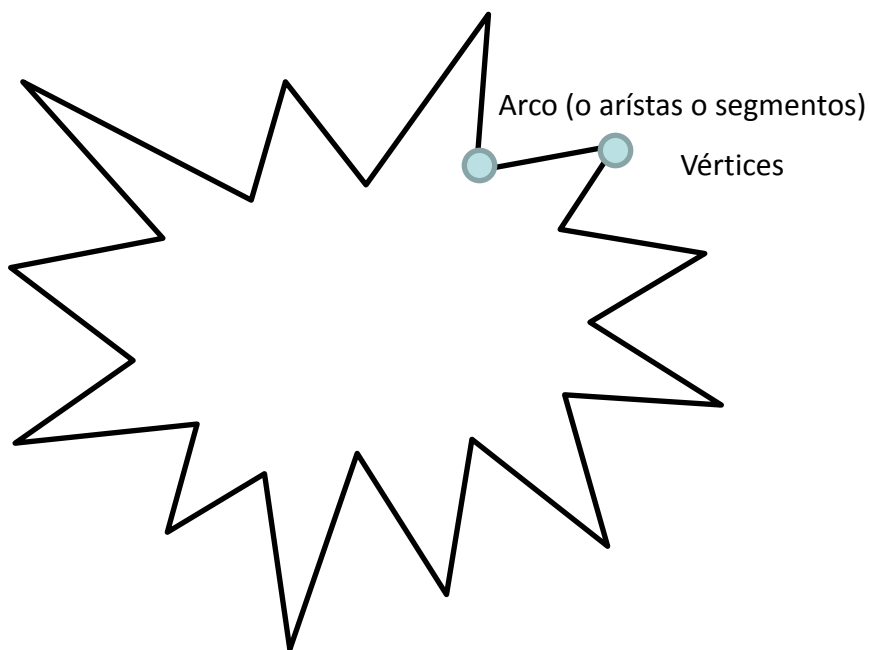
$$e_i \cap e_{i+1} = v_{i+1}$$



- Representación natural de un polígono: secuencia de puntos ordenados clock-wise (o inversamente).

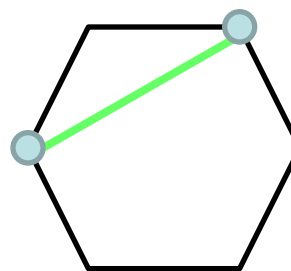
Otros términos:

- Polígono (2D)=vértices y arcos
- Superficie (3D)=caras

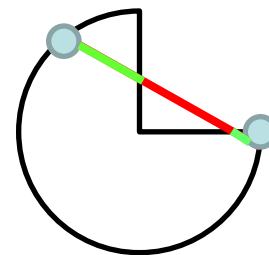


Clasificación:

- Si la línea entre dos puntos siempre pertenece al conjunto.



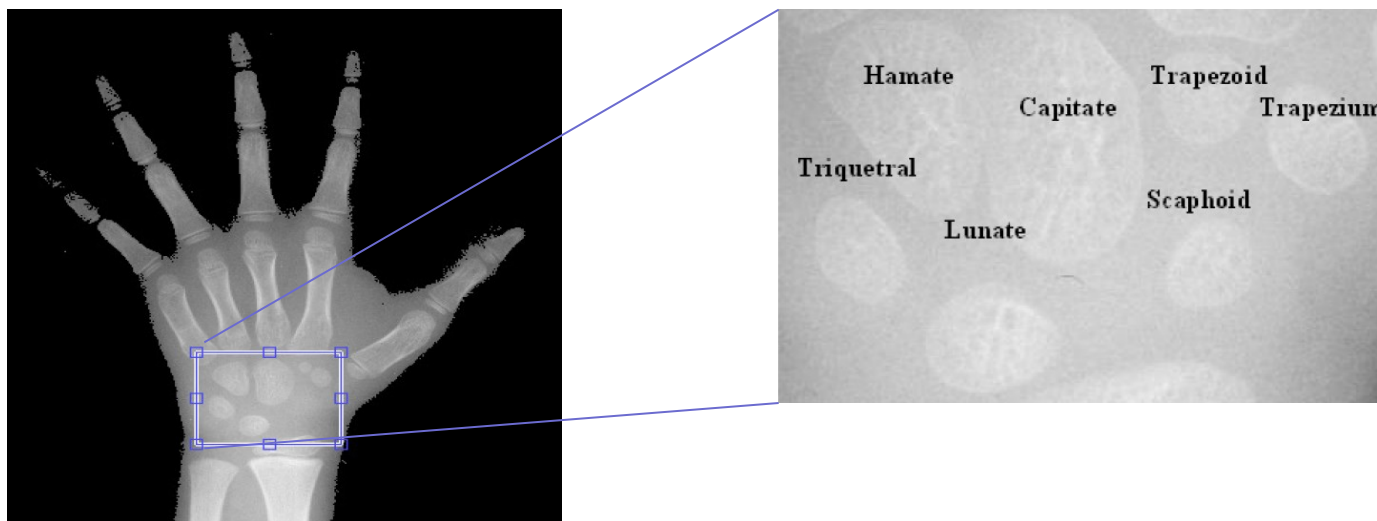
Polígono
convexo



Polígono no-
convexo

1. Envoltura Convexa.
2. Diagrama de voronoi.
3. Triangulación delaunay y dualidad (2D/3D)
4. Visualización y luz.
5. Mallas en microscopía.

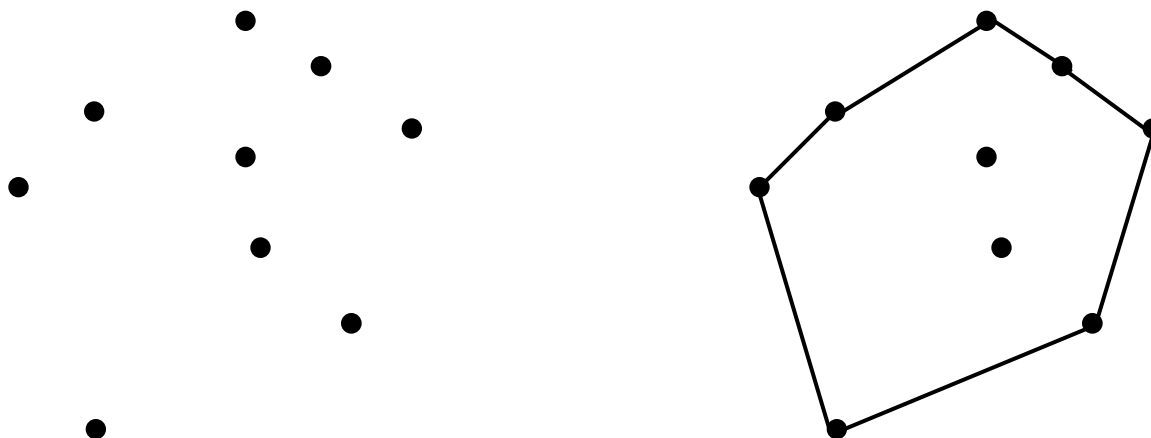
Una gran variedad de descriptores compuestos, utilizan la envoltura convexa como paso intermedio.



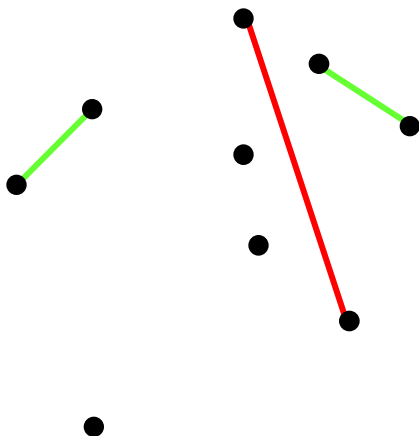
- Extraer características geométricas
- Para clasificar la edad de un paciente

-Solidez $\longrightarrow = \frac{\text{Perímetro envoltura convexa}}{\text{Perímetro}}$
 -Convexidad
 -Concavidad

Dado un conjunto de puntos (P), la envoltura convexa (convex hull o CH) se define como el polígono convexo más pequeño que rodea todos los puntos.

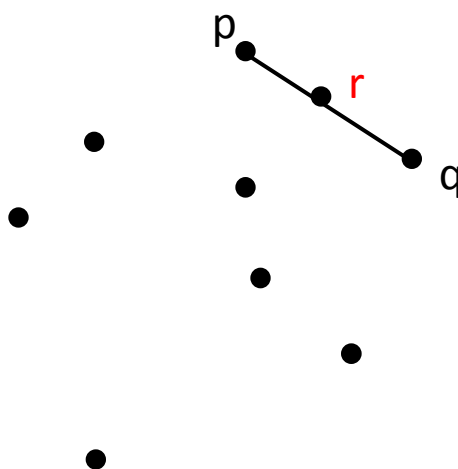


- Todos los pares de puntos (p,q) en la cerradura no tienen ningún punto a la izquierda (o derecha) dependiendo de donde se mire.
- Calcular la secuencia de vértices en orden: partir de cualquier arco eligiendo uno de sus puntos extremos, buscar el siguiente arco que lo contenga, y continuar así hasta llegar al otro extremo del arco inicial.
- Este algoritmo tiene $O(n^3)$ pasos.

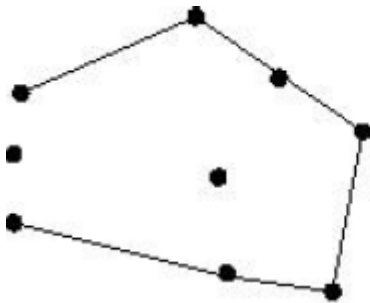


- Rojo: segmentos fuera CH
- Verde: segmentos en CH

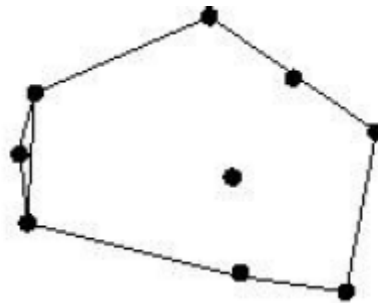
- ¿Qué pasa cuando un punto (r) está sobre la línea que pasa por (p) (q)? A esto se le llama caso degenerado.
- ¿Podemos testear de manera exacta si un punto está a la derecha o izquierda de una línea?
- Esto no es necesariamente verdadero: si los puntos están dados en coordenadas de punto flotante y los cálculos son hechos usando aritmética de punto flotante, existirán errores de redondeo que pueden distorsionar el resultado calculado.



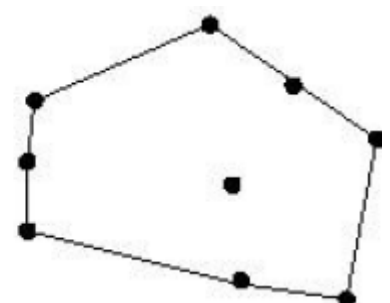
- ¿Qué conclusión podemos sacar?
 - El algoritmo anterior funciona (es lento) incluye casos degenerados (maneja casos especiales) pero no es robusto:
 - Pequeños errores de cálculo pueden hacerlo fallar en situaciones inesperadas.
- ¿Cuál es el problema?
 - Nosotros hemos asumido que podemos calcular de manera exacta con números reales.



Error



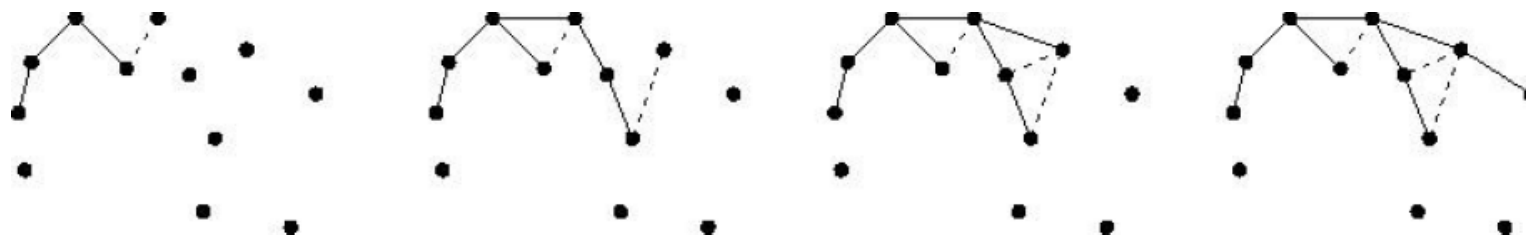
Error



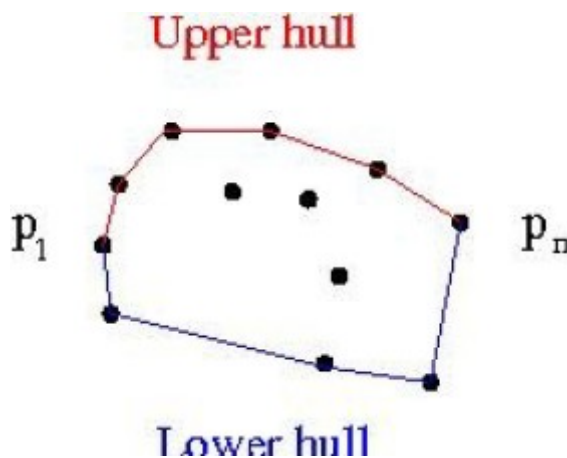
Correcto

- Usando una estrategia incremental
 - Insertar puntos uno a uno, actualizando la solución después de cada adición
 - Inserción de izquierda a derecha
- Pasos del algoritmo:
 - Ordenar los puntos por la coordenada “x” $\rightarrow O(n \log n)$
 - Calcular la parte superior del hull (upper hull): parte de la cerradura convexa que va desde p_1 (el punto de más a la izquierda) hasta p_n (punto de más a la derecha) en orden clockwise
 - Calcular la parte inferior de la cerradura convexa (lower hull) partiendo de p_n hasta p_1 .

- Pasos del algoritmo para construir el upper hull



- Resultado:



- ¿Qué hace el algoritmo en presencia de errores en la aritmética de punto flotante?
 - un punto dentro de la cerradura real no es eliminado
 - un punto que debería estar en la cerradura es eliminado
- Pero la integridad de la estructura del algoritmo no es dañada. El algoritmo calcula un polígono cerrado.
- El único problema que aún puede ocurrir es que cuando tres puntos están muy cercanos, una vuelta que es realmente una virada a la izquierda puede ser interpretada como un virada a la derecha. Es puede generar un dent (hendidura) en el polígono.
- ¿Solución? Si dos puntos están muy cercanos, juntarlos y considerar uno solo

- ¿Es ésta una buena solución? **Si**
 - No podemos esperar tener un resultado exacto con aritmética inexacta
 - En muchas aplicaciones esto puede ser suficiente (parámetros de imágenes)
- Importante: Hay que ser cuidadoso en la implementación de los tests básicos geométricos para evitar la mayor cantidad de errores posible
- Los errores de redondeo provocan fallas en los algoritmos, pero un buen diseño aun puede entregar soluciones aproximadas (epsilon maquina 10^{-16})

- El orden del algoritmo de envoltura convexa mostrado es $O(n \log n)$, el mismo tiempo mínimo que toma ordenar un conjunto de datos. ¿Qué puede concluir respecto al tiempo total para calcular la envoltura convexa después de ordenar los puntos?

1. Envoltura Convexa.
2. Diagrama de voronoi.
3. Triangulación delaunay y dualidad (2D/3D)
4. Visualización y luz.
5. Mallas en microscopía.

- Tinción en cáncer de mamas.

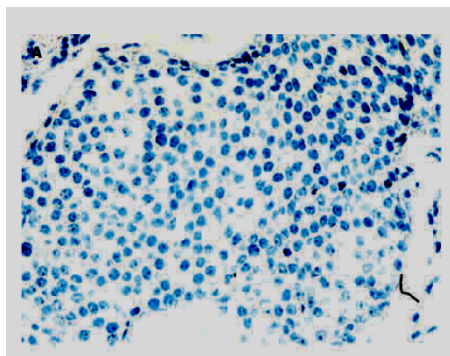
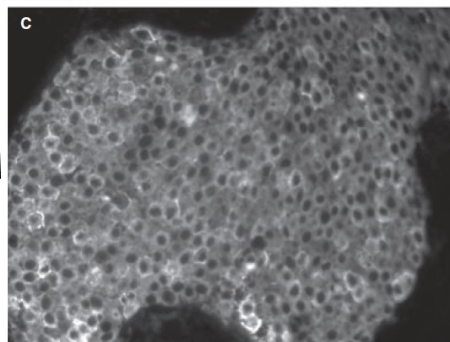
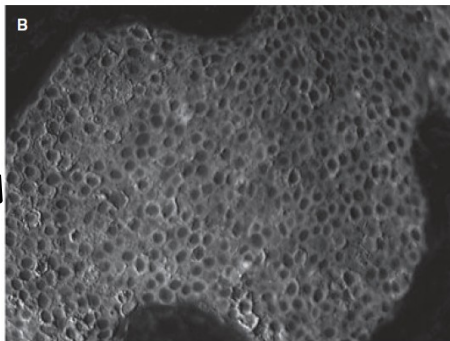
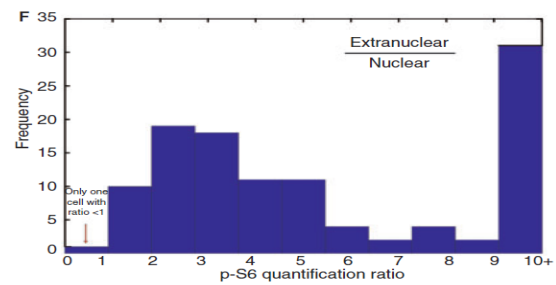
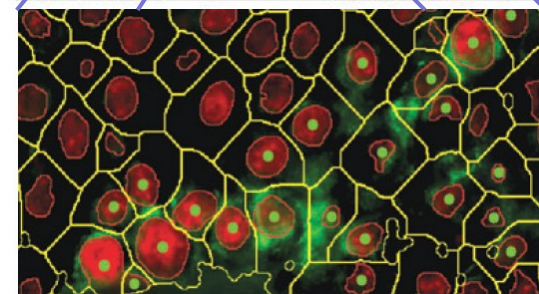
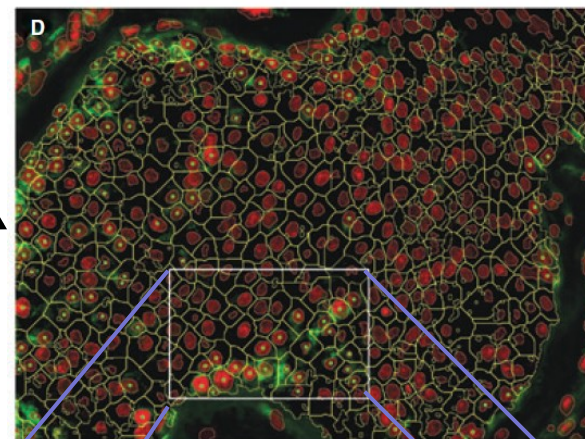


Imagen campo claro inmunofluorescencia.

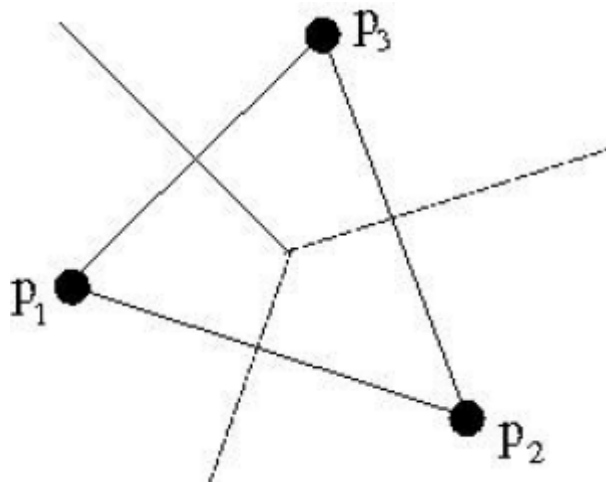


Anticytokeratin (Alexa-555) y Anti-epithelial membrane antigen (Alexa-594)

Imagen compuesta: en verde marcador cancerígeno (anti-p-6 Alexa-488)

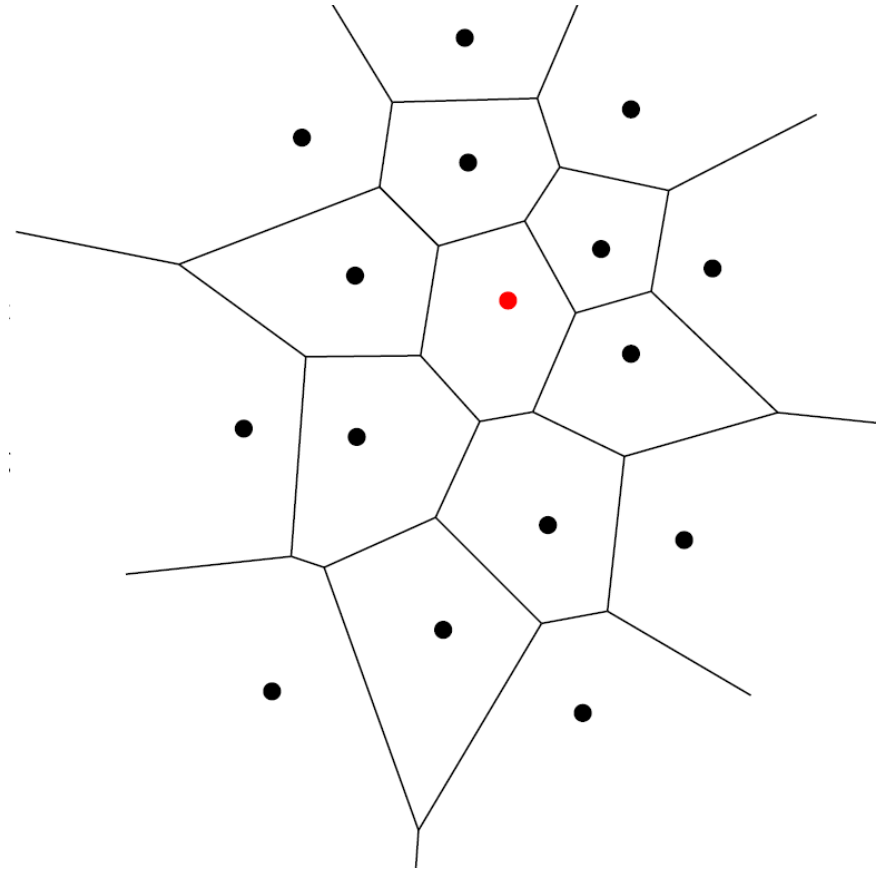
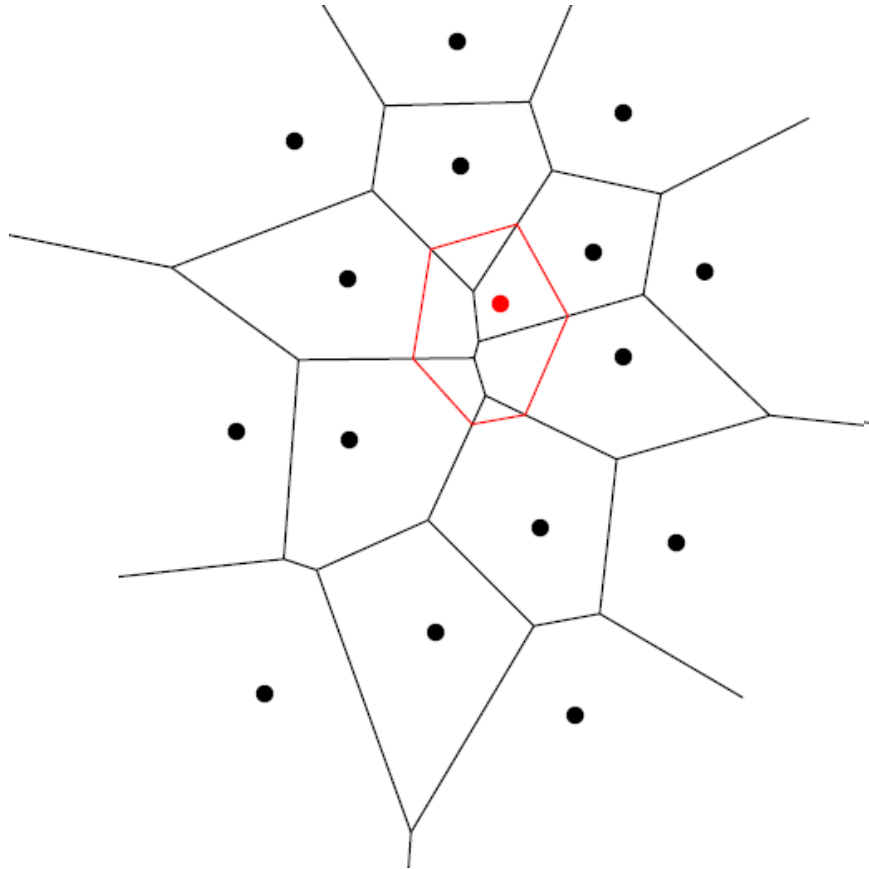


- Sea $P=\{p_1, p_2, \dots, p_n\}$ un conjunto de puntos en el plano. Estos puntos son llamados sitios. La idea es asignar a cada punto del plano el **sitio** más cercano.
- Todos los puntos asignados a p_i forman la region de Voronoi $V(p_i)$.

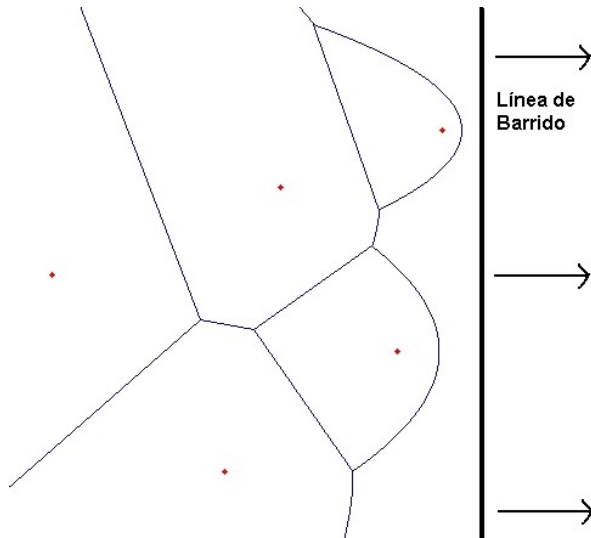


- Diagrama de Voronoi
 - Cada región de Voronoi es convexa.
 - $V(p_i)$ es abierta si p_i está en la cerradura convexa de P .
 - Si v es un vértice en la intersección de $V(p_1)$, $V(p_2)$ y $V(p_3)$, v es el centro del círculo $C(v)$ determinado por p_1, p_2 y p_3 .
 - $C(v)$ es el centro del circuncírculo del triángulo correspondiente a V .
 - El interior de $C(v)$ no contiene sitios.
- ¿Cómo construir el diagrama de Voronoi?

- Algoritmo incremental $O(n^2)$



- Algoritmo de Fortune (barrido), $O(n \log (n))$



- Detección de eventos en algoritmo de Fortune

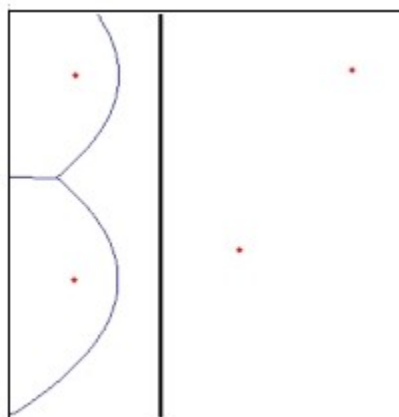


Figura 1

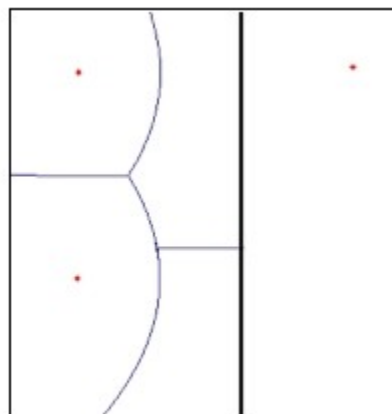


Figura 2

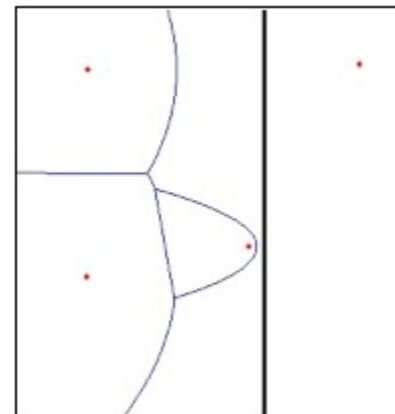


Figura 3

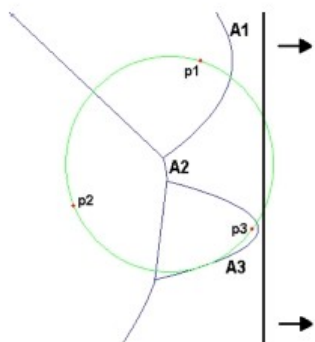


Figura 1

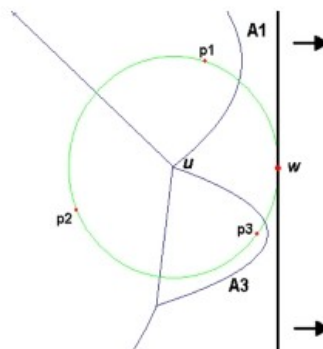


Figura 2

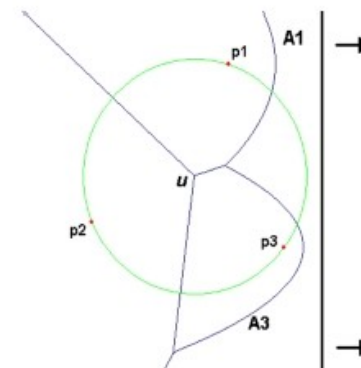


Figura 3

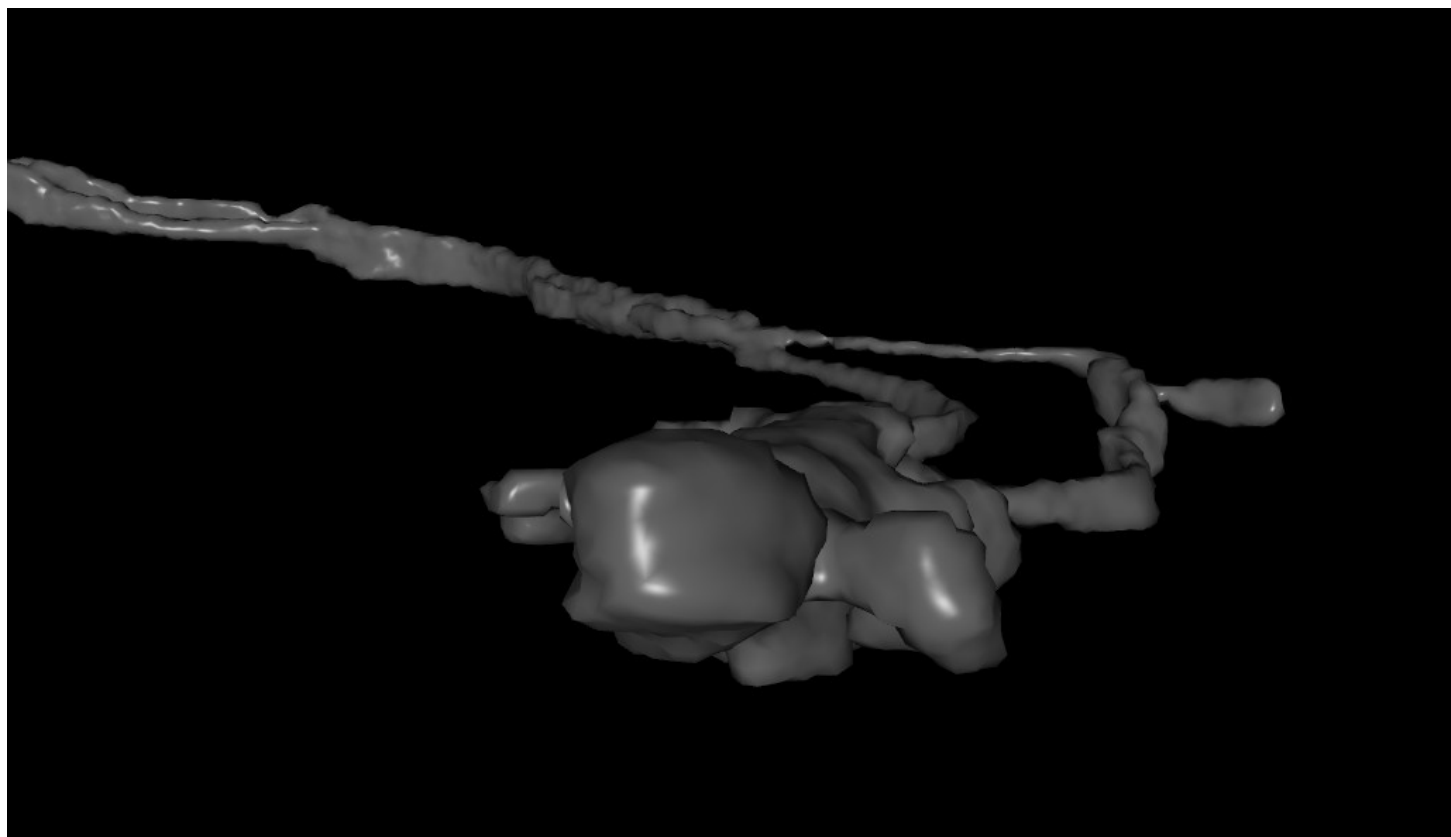
- El diagrama de voronoi de un conjunto de N puntos que se puede calcular en $O(N \log(N))$ pasos.
- Una implementación simple lo calcula en tiempo $O(n^2)$
- Las regiones de voronoi en la envoltura convexa son abiertas (infinitas).

Luego de tomar este curso, un alumno propone calcular el diagrama de voronoi de los colegios de Santiago. De esta manera cada niño deberá asistir a su colegio más cercano.

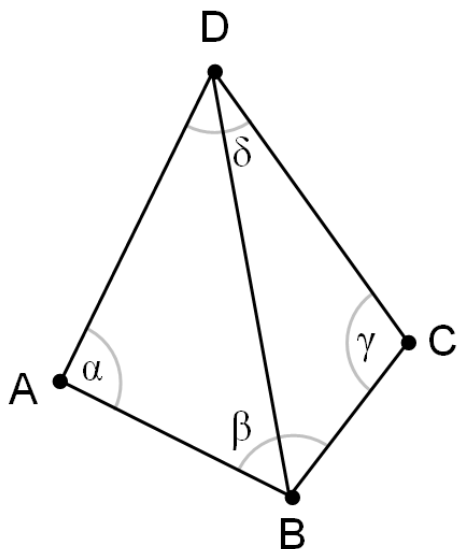
- Sabemos que habrán regiones de voronoi abiertas, pero la región metropolitana es finita y no convexa, ¿qué problemas podrían ocurrir?
- En función del número de colegios (N) y los vértices (M) que definen el polígono del area metropolitana, proponga un algoritmo para calcular este diagrama de voronoi, ¿cuantos pasos tiene su algorimo?
- Suponga ahora que un niño que vive en una comuna A, no puede ir a un colegio de la comuna B por razones administrativas, ¿qué solución propone Ud?.

1. Envoltura Convexa.
2. Diagrama de voronoi.
3. Triangulación delaunay y dualidad (2D/3D)
4. Visualización y luz.
5. Mallas en microscopía.

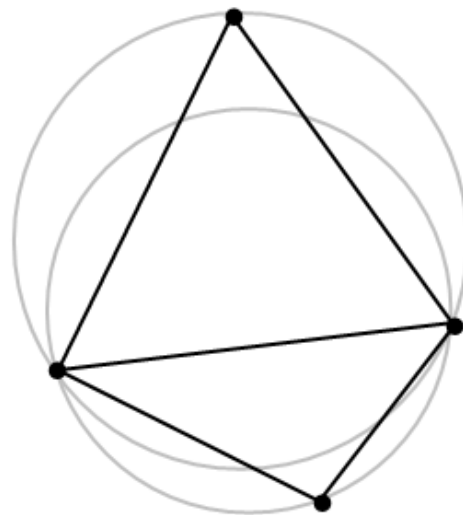
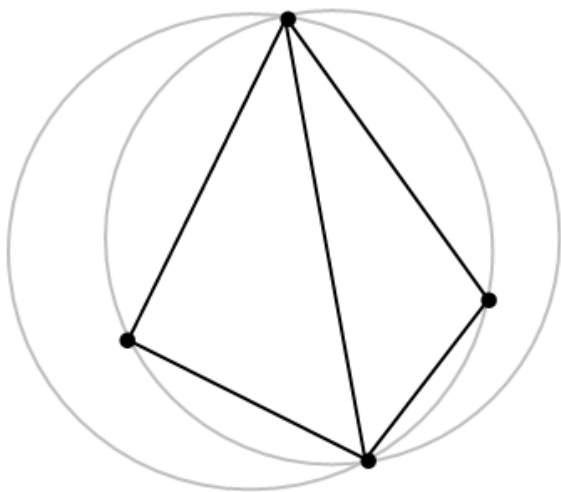
- ¿Cómo representar un stack 3D, en particular la superficie?



- La triangulación de Delaunay de un conjunto de puntos, es aquella donde el círculo circuncrito a cada triángulo no contiene otros puntos.
 - Maximiza el ángulo más pequeño.
 - Evita triángulos alargados.

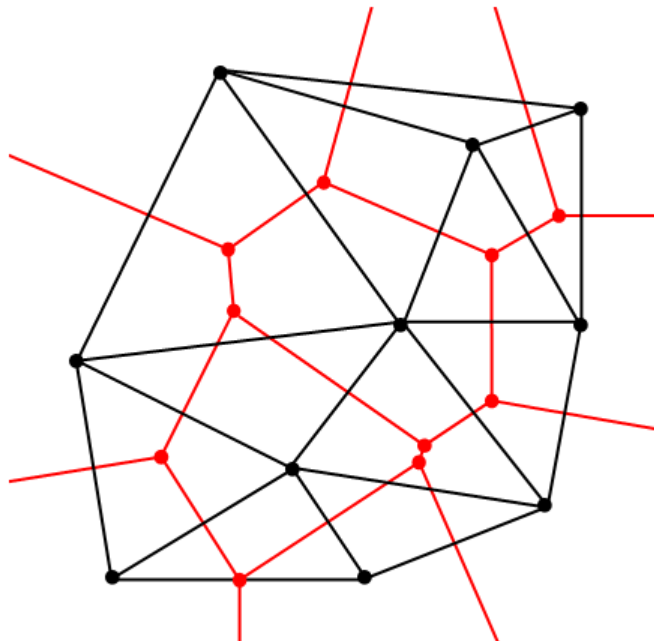


No es Delaunay



Si es Delaunay

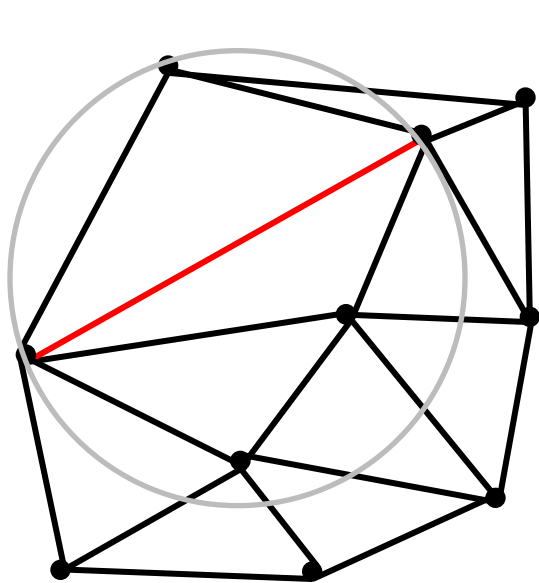
- Es el grafo dual $G(P)$ del diagrama de Voronoi $V(P)$
- ¿Cómo se construye?
 - Agregar un arco por cada par de sitios que comparte un arco de Voronoi
 - Todas las caras de G son triángulos, en donde a cada uno le corresponde un vértice de Voronoi, si no hay sitios co-circulares.



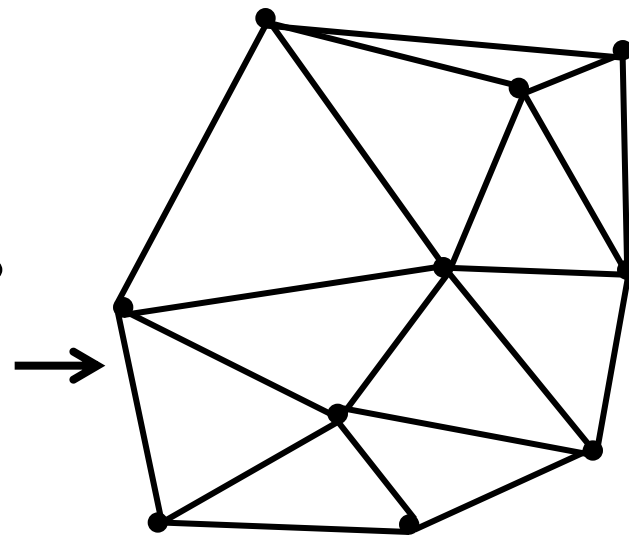
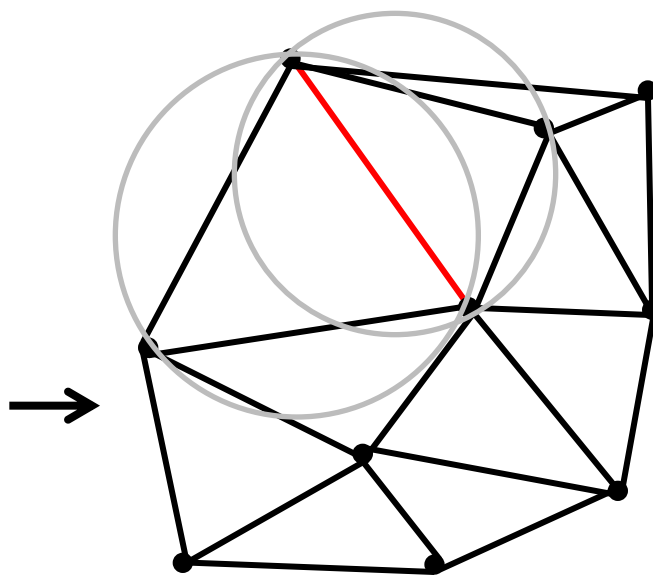
Rojo: Diagrama de Voronoi.
 Negro: Triangulación Delaunay

- Dado que son estructuras duales, la triangulación de Delaunay $D(P)$ y el diagrama de Voronoi $V(P)$ contienen la misma información en algún sentido, pero la representan de otra forma.
- Triangulación de Delaunay
 - $D(P)$ es una triangulación si no hay puntos co-circulares.
 - A cada triángulo de $D(P)$ le corresponde un vértice de Voronoi de $V(P)$.
 - A cada arco en $D(P)$ le corresponde un arco en $V(P)$.
 - A cada vértice en $D(P)$ (sitio) le corresponde una región en $V(P)$.
 - El borde de $D(P)$ es la cerradura convexa de P .
 - El interior de cada triángulo de $D(P)$ no contiene otros sitios de P .

- Genero una triangulación cualquiera.
- Reviso para cada arista que se cumpla la condición del círculo
- De no ser así cambio la diagonal
- $O(n^2)$ cambios de diagonal

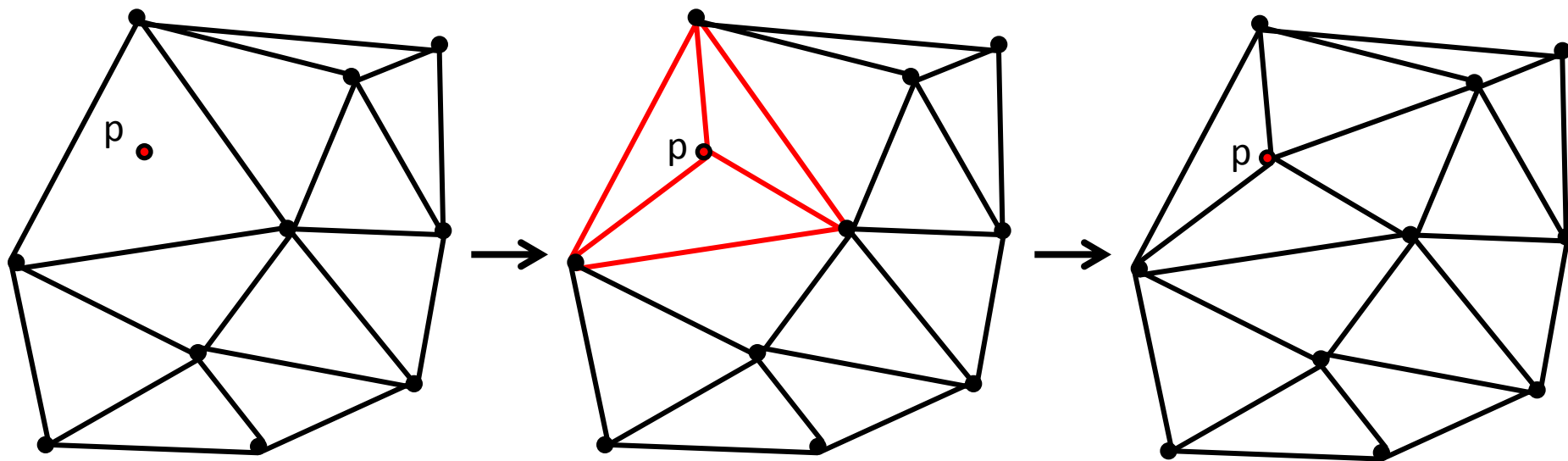


No es Delaunay

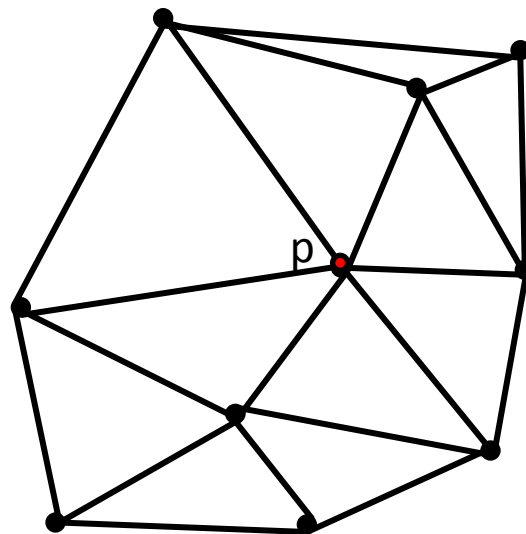
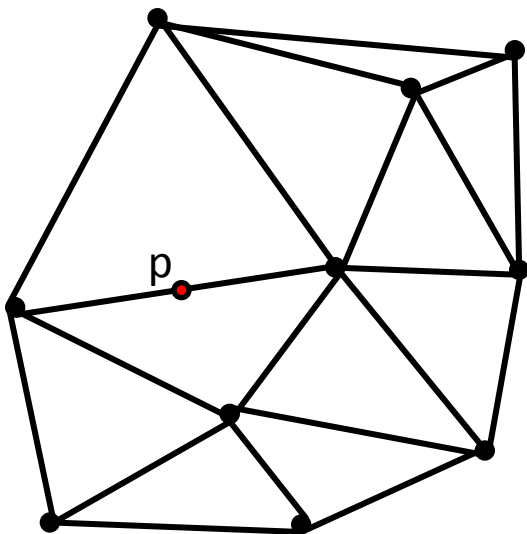


Si es Delaunay

- Sea t el triángulo que contiene a p y p el punto a insertar
- Unir p con cada vértice de t formando tres triángulos
- Mientras un nuevo triángulo no satisface la condición de Delaunay
 - Invertir el arco (diagonal) del cuadrilátero formado por los dos triángulos
 - Notar que se forman dos nuevos triángulos



- Este proceso lleva a encontrar la triangulación y también al Diagrama de Voronoi
- ¿Qué casos especiales degenerados hay?
 - p está "sobre" un arco
 - p coincide con un vértice



- El algoritmo incremental opera en $O(N^2)$ iteraciones.
- Dado un conjunto de N puntos, la triangulación de delaunay se puede calcular en $O(N \log(N))$ iteraciones usando el algoritmo incremental.
- El test del círculo es el cálculo más delicado.
- Una buena triangulación (malla) ayuda a generar simulaciones más rápida y con menos error.

Para simular la deformación producida por una contusión en una mano se debe generar primero una triangulación pero esta debe respetar el polígono que representa el borde de la mano.

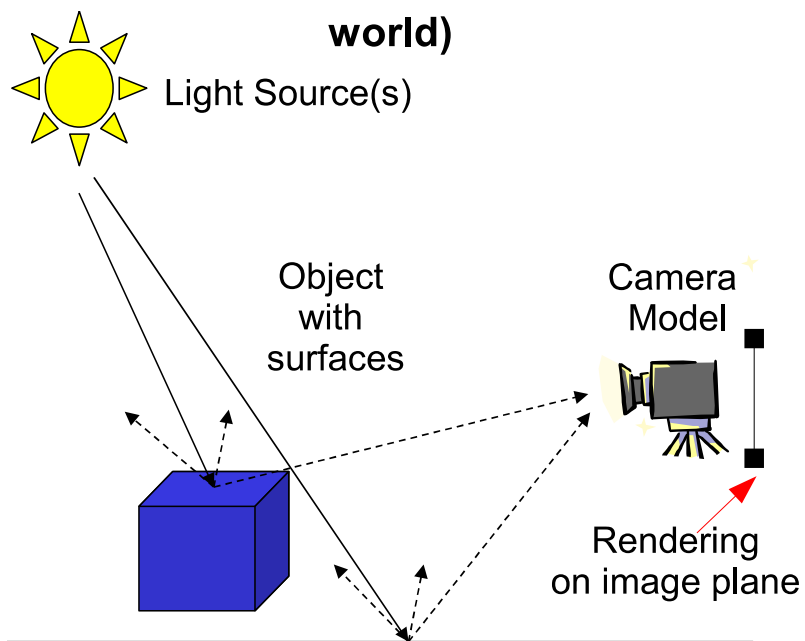
- ¿Qué problemas podría ocurrir?
- ¿Que idea podría solucionar este problema?
- ¿Cuántas operaciones requiere su solución?

1. Envoltura Convexa.
2. Diagrama de voronoi.
3. Triangulación delaunay y dualidad (2D/3D)
4. Visualización y luz.
5. Mallas en microscopía.

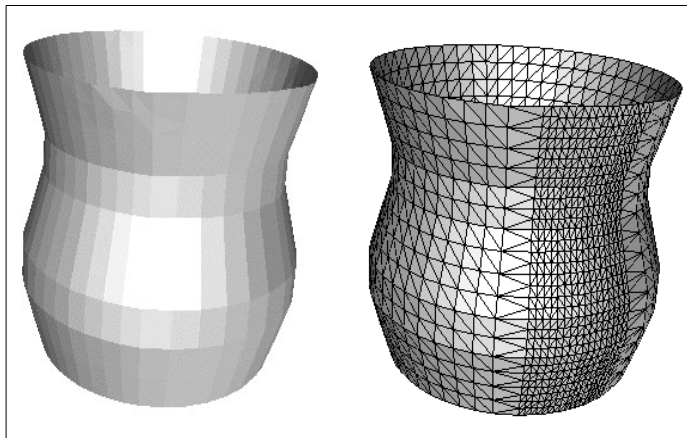
- En microscopía es común observar una nube de puntos y es útil visualizar la superficie.



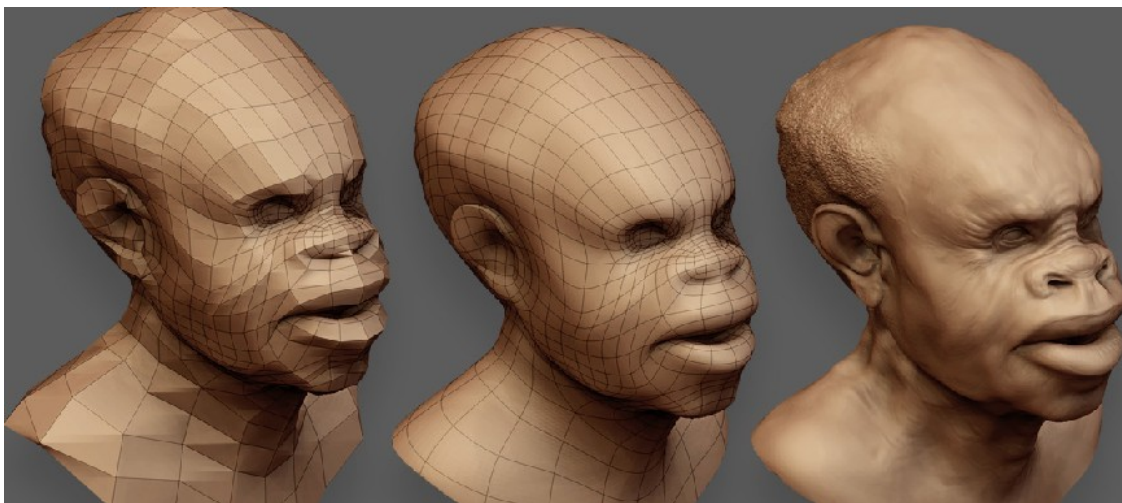
- La visualización de un objeto requiere modelar al menos:
 - El objeto y su representación (geometría) 
 - La iluminación
 - La cámara
 - Pasar del “mundo” a una representación plana (imagen)
 - Se habla comunmente de rendering



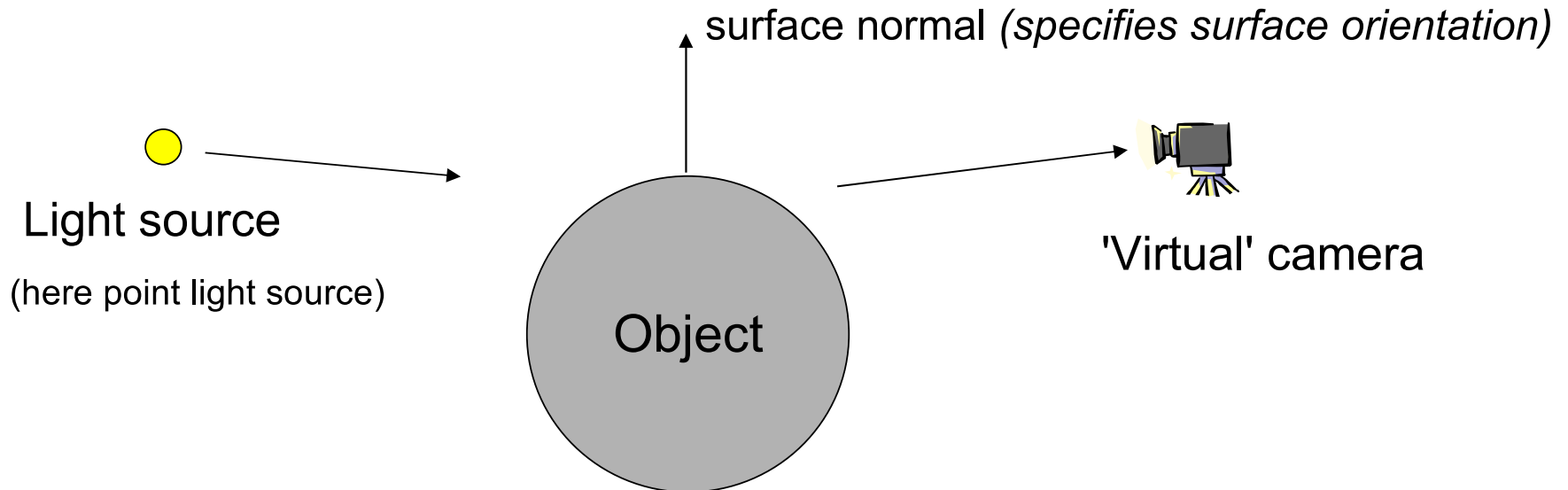
- Utilizando mallas de superficie de triángulos.



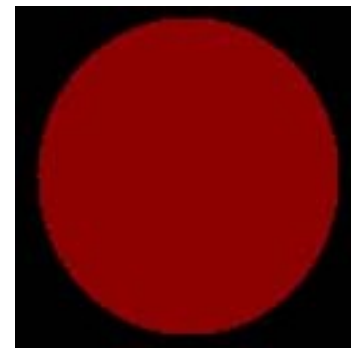
- A diferentes niveles de detalle (convex hull, delaunay).



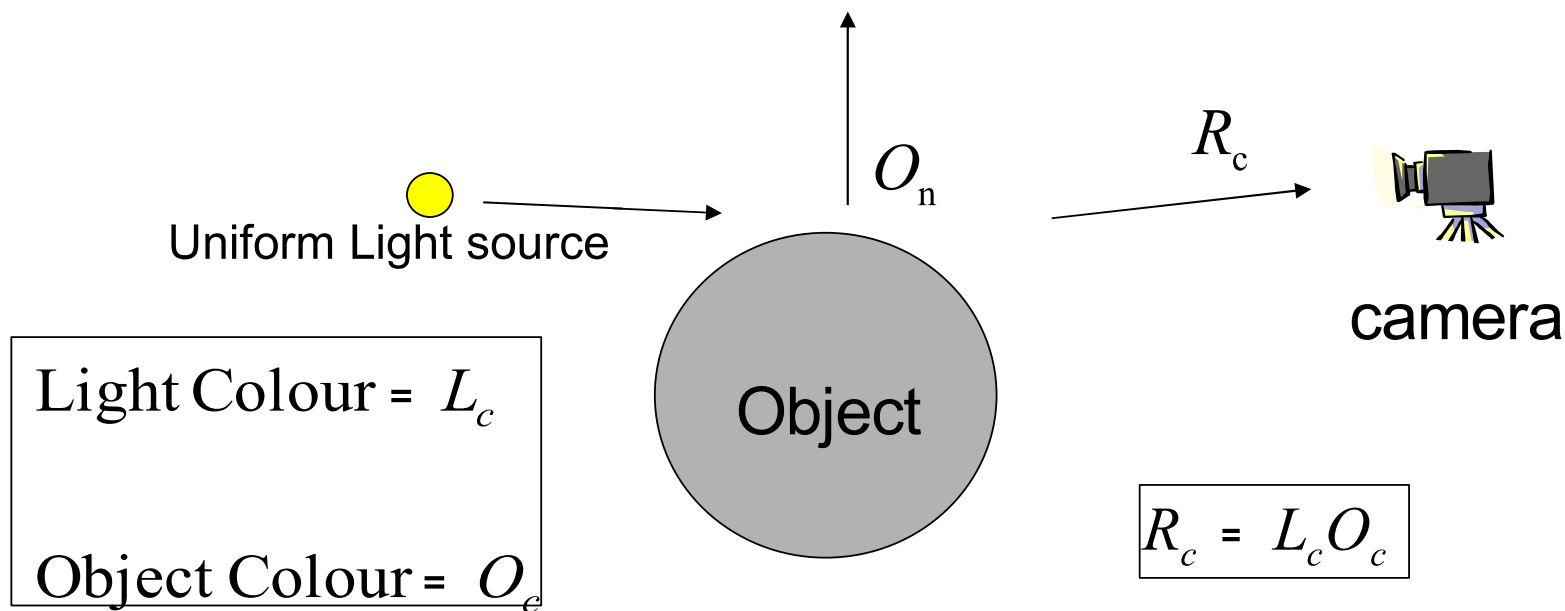
- Un modelo simple consta de 3 tipos de iluminaciones:
 - Ambiental (o de fondo)
 - Especular (o brillante)
 - Difusa (opaca con sombras)



- Luz del ambiente
- Luz reflejada desde otros objetos
- Resulta en un color uniforme para un objeto
 - R_c : intensidad resultante
 - L_c : intensidad de luz
 - O_c : color de objeto

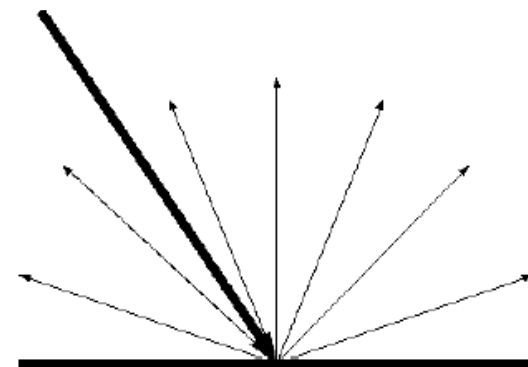
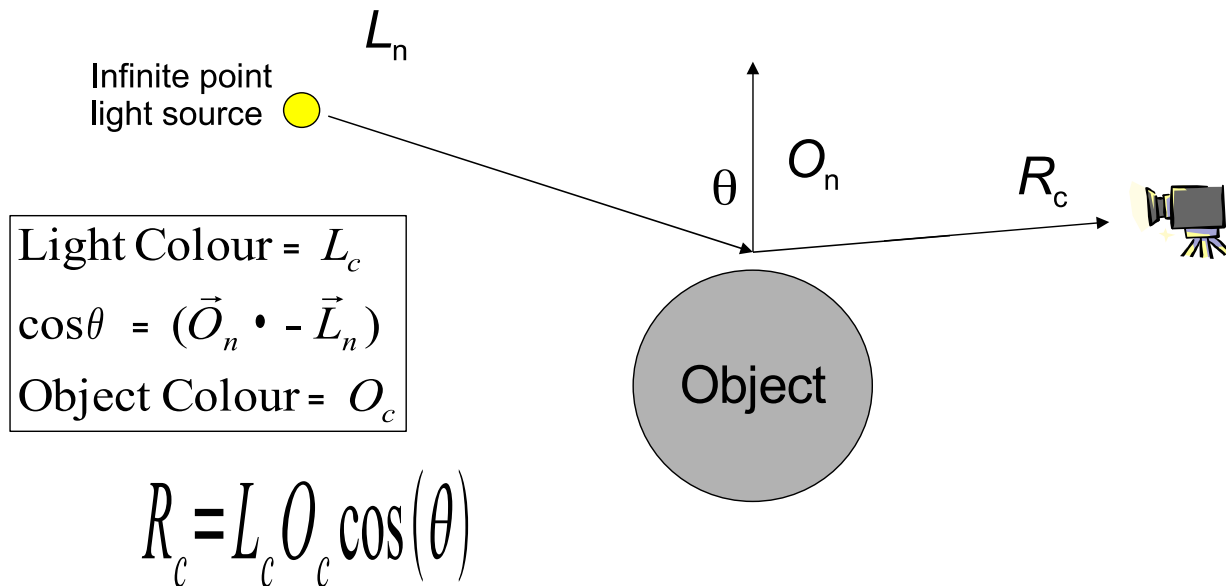


Example: sphere



Visualización: iluminación difusiva

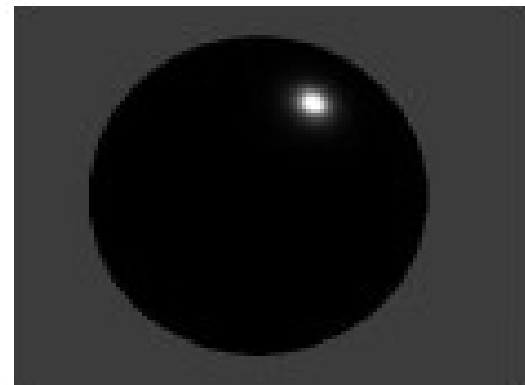
- Conocida como reflexión lambertiana
- Considera el ángulo de incidencia de la luz
- Resulta en una iluminación variable dependiendo de la orientación de la superficie con la luz.
- No depende de la cámara



Example: sphere
(lit from left)

Visualización: iluminación especular

- Reflexión directa de la fuente de iluminación (espejo).
- Intensidad especular n = reflectancia de un objeto.
- No depende del color del objeto.
- Resultado: brillo especular de un objeto.



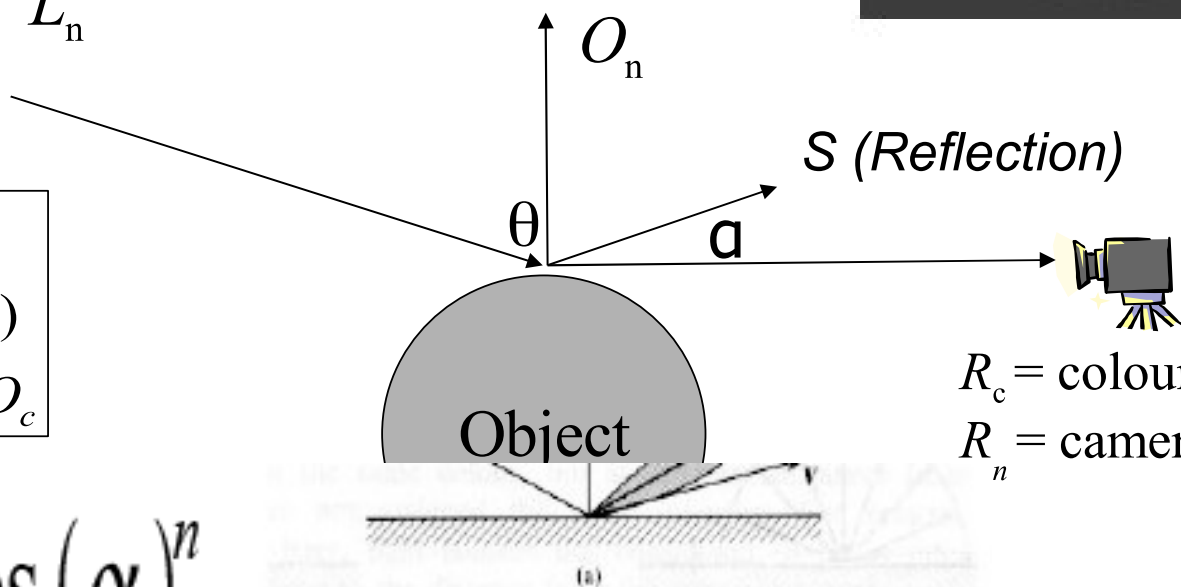
Infinite point
light source



L_n

Light Colour = L_c
 $\cos \theta = (\vec{O}_n \cdot -\vec{L}_n)$
 Object Colour = O_c

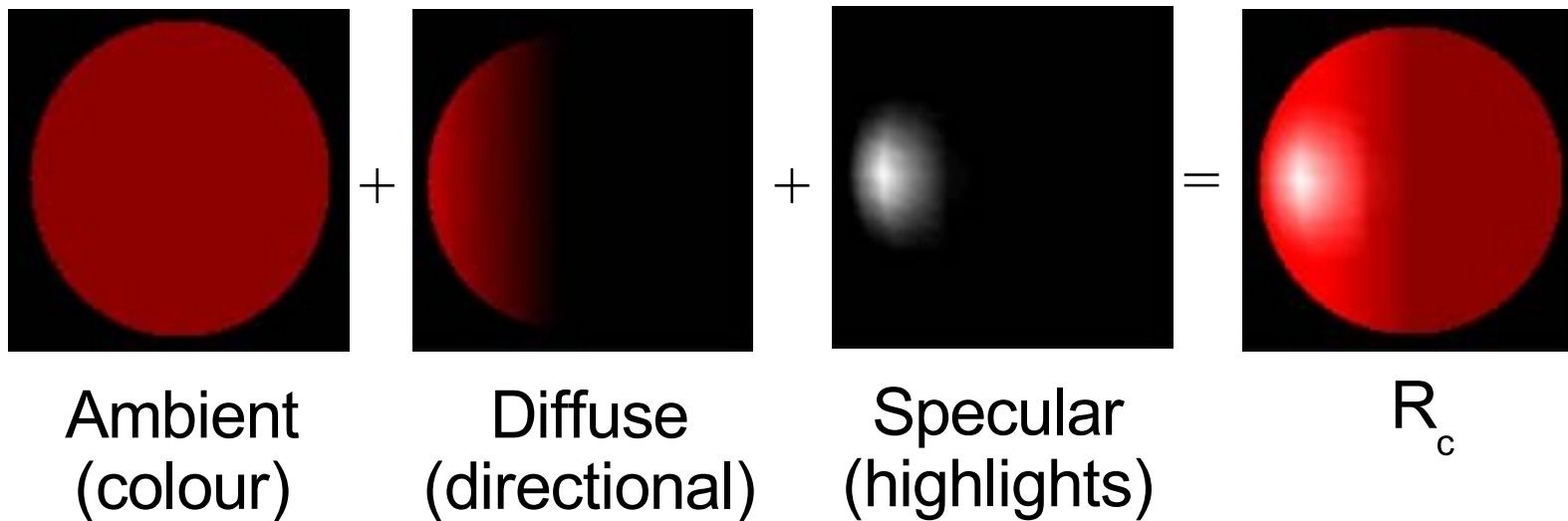
$$R_c = L_c k_s \cos(\alpha)^n$$



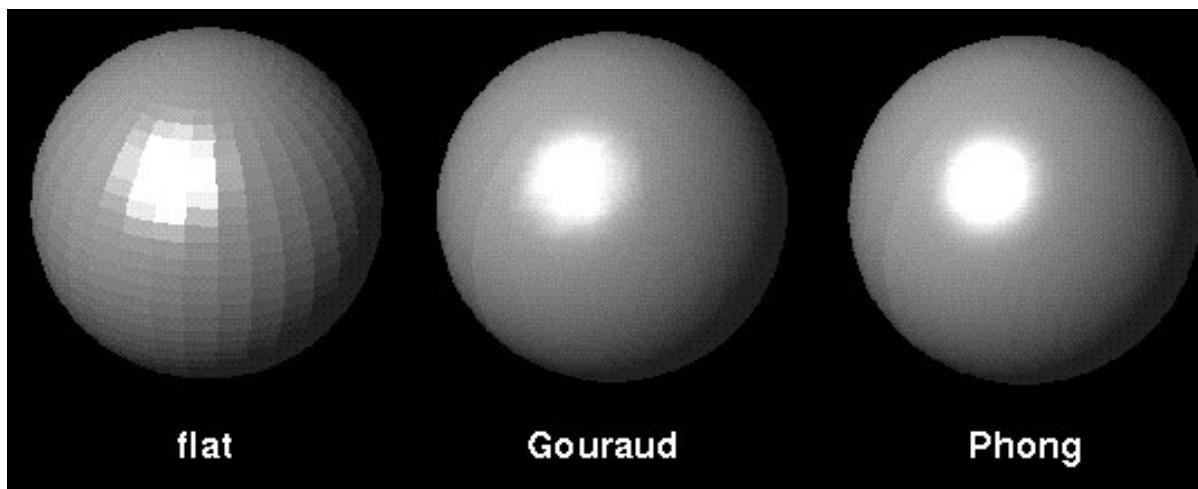
R_c = colour curve
 R_n = camera position

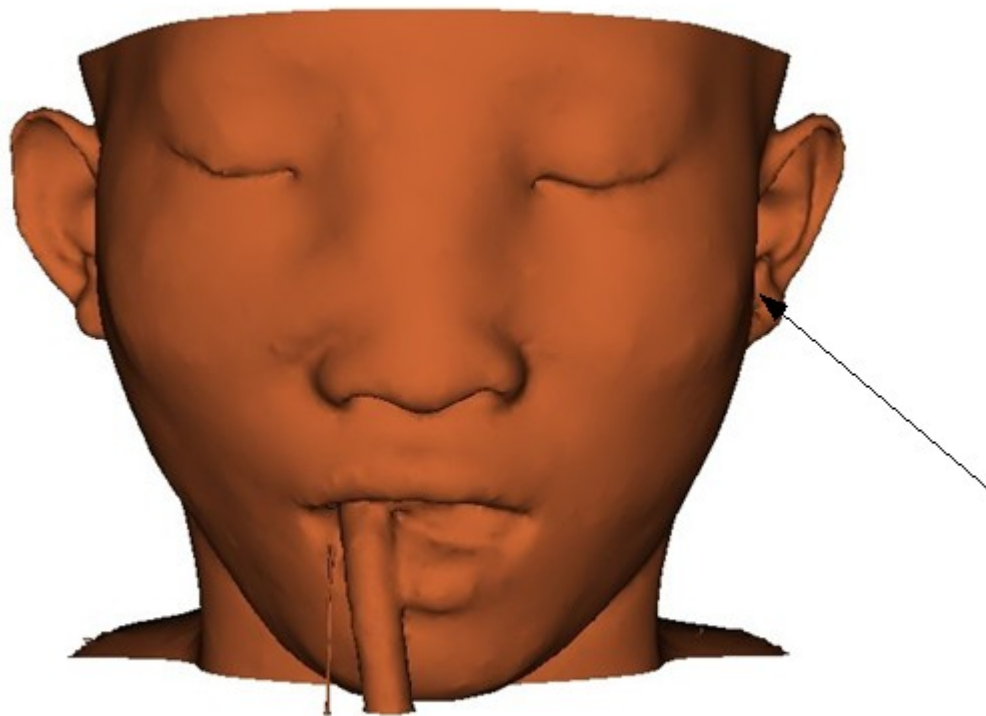
nce on object colour.

- $R_c = w_a \text{ (ambiente)} + w_d \text{ (difusa)} + w_s \text{ (especular)}$
- w_a , w_d y w_s son los pesos relativos

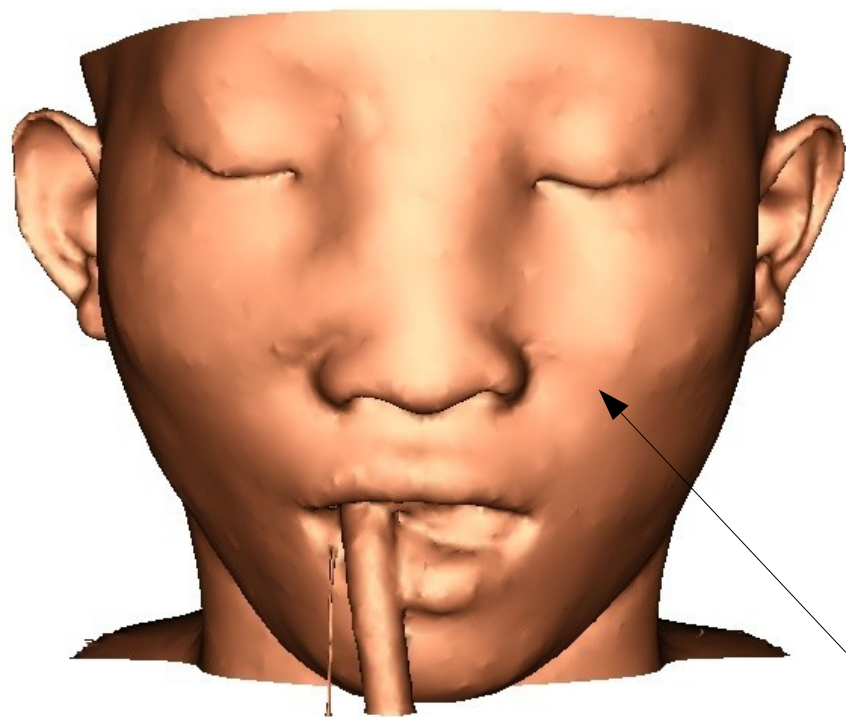


- Tres estrategias principales de cálculo:
 - Calcular un color por cara o triángulo (flat shading)
 - Calcular en los vertices e interpolar (Gouraud shading)
 - Calcular en cada punto (Phong shading)

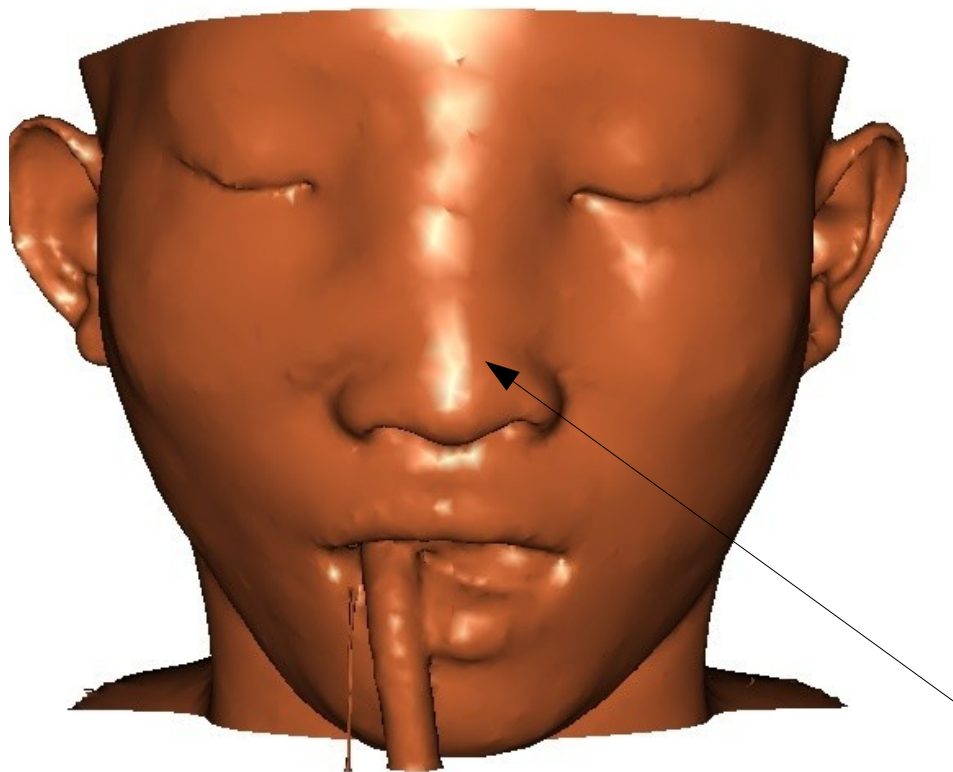




- Superficie de la piel de un scanner médico.
- Luz difusiva desde la parte frontal superior.
- El área perpendicular a la luz se reconoce fácilmente (flecha)



- Superficie de la piel de un scanner médico.
- Luz difusiva y especular
- $N=4$ (specular power)
- El límite del area se reconoce bien (flecha)



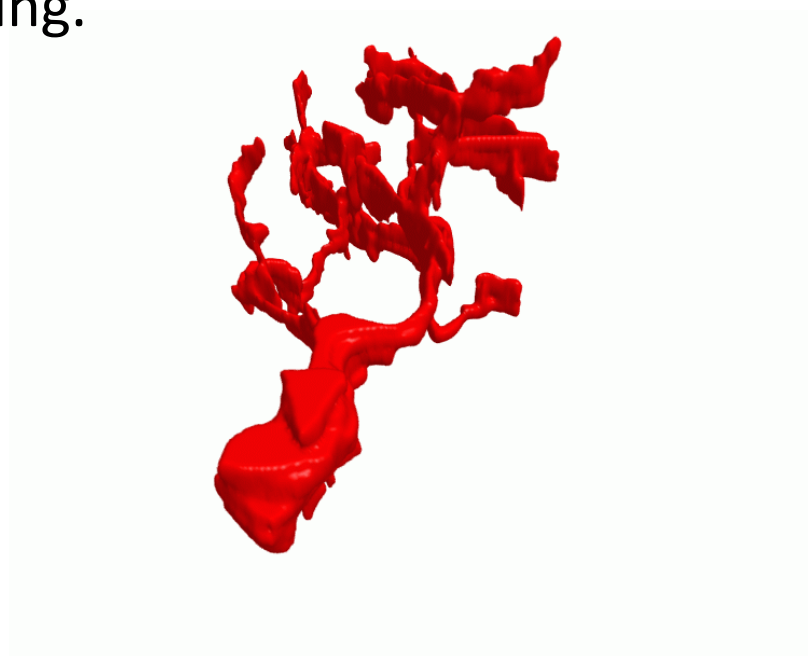
- Superficie de la piel de un scanner médico.
- Luz difusiva y especular
- $N=200$ (specular power)
- El límite del area se reconoce bien (flecha)



- Specular highlights
 - Mejoran la percepción de ciertas características (e.g. nariz)
 - ...sólo donde se destaca usando la luz especular.

- Una buena visualización 3D requiere de una adecuada:
 - representación geométrica (malla)
 - un modelo de iluminación
 - una cámara.
- La iluminación permite destacar un rasgo de interes.

- Si tomo dos fotos de un material lambertiano desde diferentes posiciones este tendra la misma o diferente intensidad?.
- ¿Qué materiales no son lambertianos?
- Dada la siguiente imagen, discuta el tipo de iluminación usada en este rendering.



1. Envoltura Convexa.
2. Diagrama de voronoi.
3. Triangulación delaunay y dualidad (2D/3D)
4. Visualización y luz.
5. Mallas en microscopía.

- ¿Cómo construir una representación 3D de un objeto observado en el microscopio?

¡Lo haremos en el práctico!