

2. Procesamiento Digital

Una formulación general para las series de Fourier es

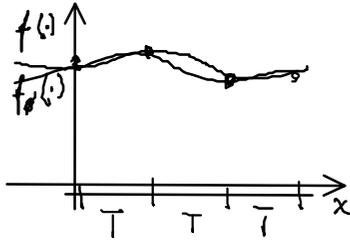
$$f(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} c_k \phi_k(x)$$

donde se utiliza otro tipo de función ϕ_k diferente a las funciones sinusoidales.

2.1 Interpolación

Se puede expresar una función continua en términos de valores equiespaciados (shift-invariant space)

$$f_{\phi}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} f(kT) \phi\left(\frac{1}{T}(x - kT)\right)$$

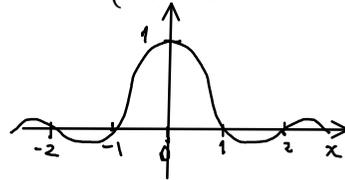


$f_{\phi}(\cdot)$ es la función interpoladora
 $\phi(\cdot)$ es la función base que interpola

Condición para la función base interpoladora (función cardinal)

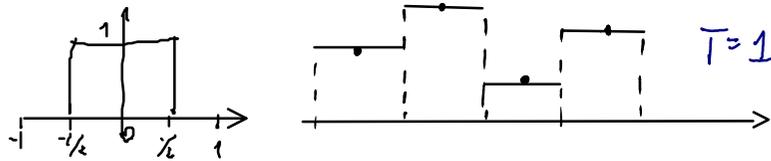
$$\phi(nT) = \delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

Ejemplo: si $\phi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x}$ $\leftarrow \frac{1}{T} = \frac{1}{T}$



Otra posibilidad: interpolación con funciones B-spline

Vecino más cercano: $\phi(x) = \text{rect}_{1/2}(x) = u(x + 1/2) - u(x - 1/2)$

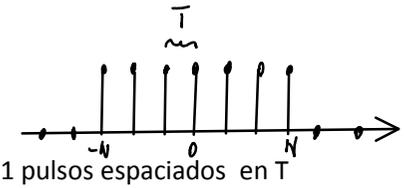


Interpolación lineal: $\phi(x) = \text{Triang}_1(x) = \begin{cases} 1+x & -1 < x < 0 \\ 1-x & 0 \leq x < 1 \\ 0 & \text{elsewhere} \end{cases}$



2.2. Tren de pulsos

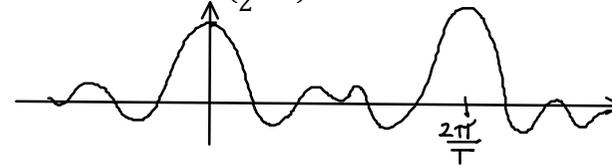
Si se tiene un tren de $2N+1$ pulsos



$$\delta_N(x) = \sum_{n=-N}^N \delta(x + nT)$$

$$D_N(\omega) = \sum_{n=-N}^N e^{in\omega T} = \sum_{n=-N}^N (e^{i\omega T})^n = e^{-iN\omega T} \frac{1 - e^{i(2N+1)\omega T}}{1 - e^{i\omega T}}$$

$$D_N(\omega) = \frac{\text{sen}\left\{\left(N + \frac{1}{2}\right)T\omega\right\}}{\text{sen}\left(\frac{1}{2}T\omega\right)}$$



Caso límite $N \rightarrow \infty$

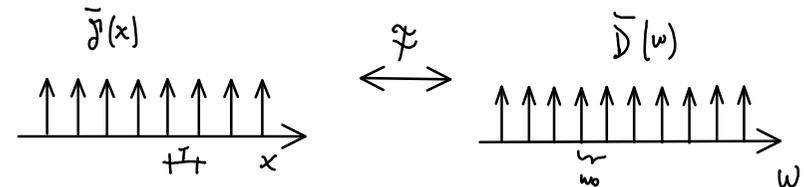
$$\bar{\delta}(x) = \lim_{N \rightarrow \infty} \delta_N(x)$$

Tren de pulsos infinito con espaciamiento T



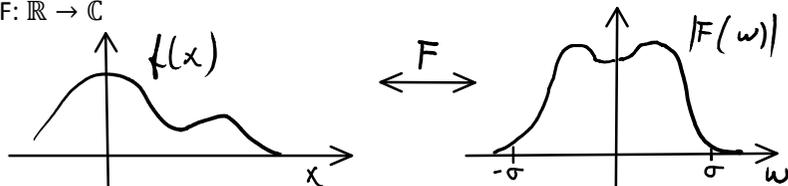
$$\bar{D}(\omega) = \lim_{N \rightarrow \infty} D_N(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \delta(\omega - n\omega_0)$$

Tren de pulsos $\omega_0 = 2\pi/T$

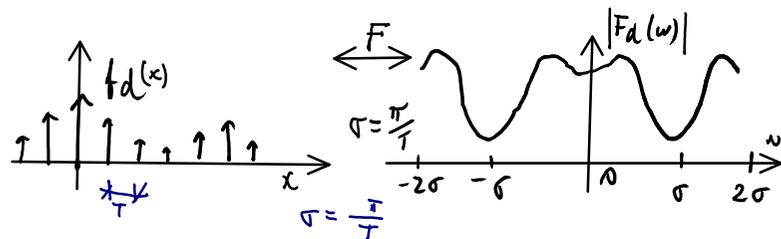


2.3 Muestreo o discretización

Supongamos que se tiene una función $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ y su transformación de Fourier $F: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{C}$



Al multiplicar la función f por un tren de pulsos, se genera una función f_d , la transformación de Fourier F_d , es la convolución de $F(\omega)$ con un tren de pulsos. Pues la transformación de un tren de pulsos es un tren de pulsos, y la transformación de Fourier de una multiplicación de 2 funciones es la convolución de la transformación de Fourier cada una de esas funciones

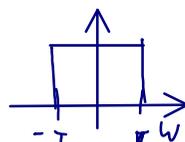


$$f_d(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \delta(x - nT) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_d(\omega) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) e^{-jnT\omega} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(\omega + 2n\sigma)$$

Sin embargo: $f_\phi(t) = f_d \otimes \phi(t)$

Porque $\sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \delta(x - nT) \otimes \phi(t) \xrightarrow{\mathcal{F}} F_\phi(\omega) = F_d(\omega) \cdot \Phi(\omega) = \Phi(\omega) \sum_{n \in \mathbb{Z}} F(\omega + 2n\sigma)$

Si $\phi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \xrightarrow{\mathcal{F}} \Phi(\omega) = \text{rect}_{2\pi}(\omega)$



Por ejemplo: $\text{rect}(x) \otimes \text{rect}(x) = \text{Triang}_1(x) \xrightarrow{\mathcal{F}} \frac{4 \text{sen}^2(\frac{\omega T}{2})}{T^2 \omega^2}$

2.4 Teorema del Muestreo

Sea $f(t)$ es una función de energía finita y σ -BL ($F(\omega) = 0$ para $|\omega| > \sigma$). Entonces, ocurre que $F_d(\omega) = F(\omega)$ para $|\omega| < \sigma$

Por lo tanto $F(\omega) = F_d(\omega) \cdot \text{rect}_\sigma(\omega) \quad \forall \omega$

Como $\phi(x) = \frac{\sin \pi x}{\pi x} \xrightarrow{\mathcal{F}} \text{rect}_\sigma(\omega)$

Finalmente $f(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \frac{\text{sen } \sigma(x - nT)}{\sigma(x - nT)}$ **Fórmula de reconstrucción**

con $\sigma = \pi/T$ la frecuencia de muestreo o Nyquist

2.3.1 Interpolación de banda limitada

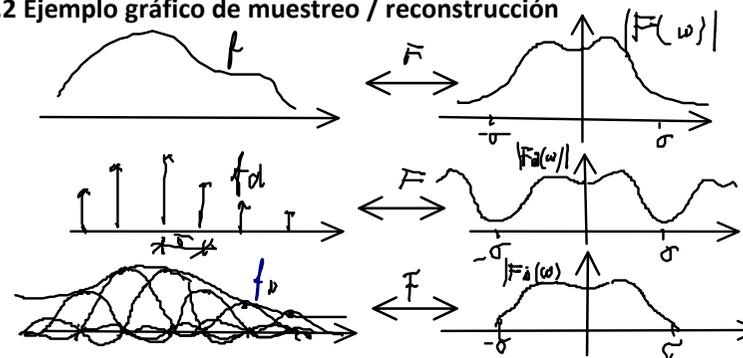
Dada una función $f(x)$ y una constante T , $\sigma = \pi/T$

$$f_i(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(nT) \frac{\text{sen } \sigma(x - nT)}{\sigma(x - nT)} \xrightarrow{\mathcal{F}} F_i(\omega) = F_d(\omega) \cdot \text{Rect}_\sigma(\omega)$$

Por lo que $f_i(x)$ se obtiene al aplicar un filtro pasa-bajos ideal a $f_d(\cdot)$, por lo que $f_i(x)$ es σ -BL. El error puntual es $f(x) - f_i(x) = 0$, para $x = nT$

y se puede demostrar que $|f(x) - f_i(x)| \leq \frac{1}{\pi} \int_{|\omega| > \sigma} |F(\omega)| d\omega$

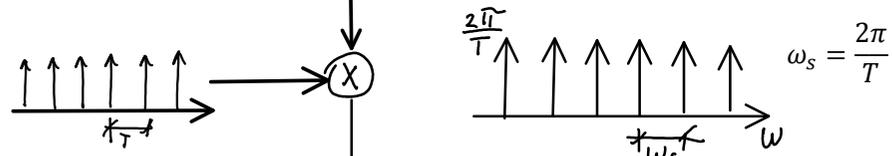
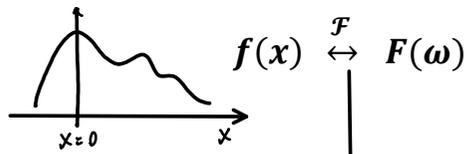
2.3.2 Ejemplo gráfico de muestreo / reconstrucción



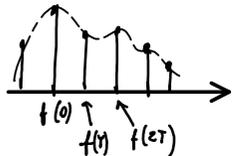
2.6 Ejemplo de Muestreo y Aliasing

Teorema del muestreo

La transformada de Fourier es



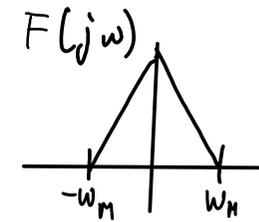
$$\tilde{\delta}(x) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(x - nT) \quad \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \quad \bar{D}(\omega) = \frac{2\pi}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s)$$



$$\begin{aligned} f_r(x) &= f(x) \tilde{\delta}(x) \\ &= \sum_{h=-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - nT) \\ &= \sum_{h=-\infty}^{\infty} f(nT) \delta(x - nT) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_r(j\omega) &= \frac{1}{2\pi} F(j\omega) \otimes \bar{D}(j\omega) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \delta(\omega - k\omega_s) \otimes F(j\omega) \\ &= \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} F(j(\omega - k\omega_s)) \end{aligned}$$

Condiciones para que ocurra Aliasing



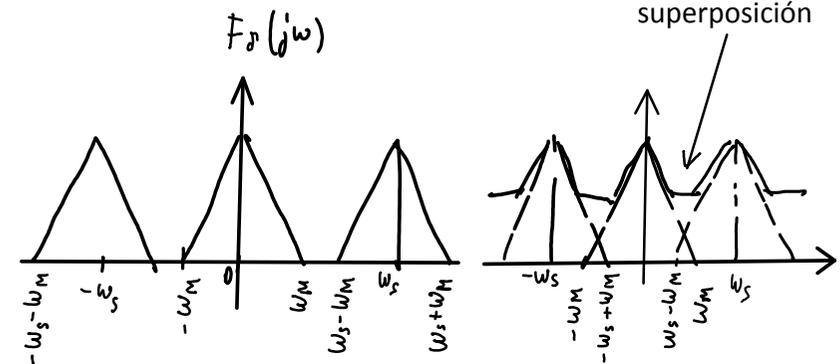
Por Teorema del muestreo

Sin Aliasing

$$\omega_s > 2\omega_M$$

Con Aliasing

$$\omega_s < 2\omega_M$$



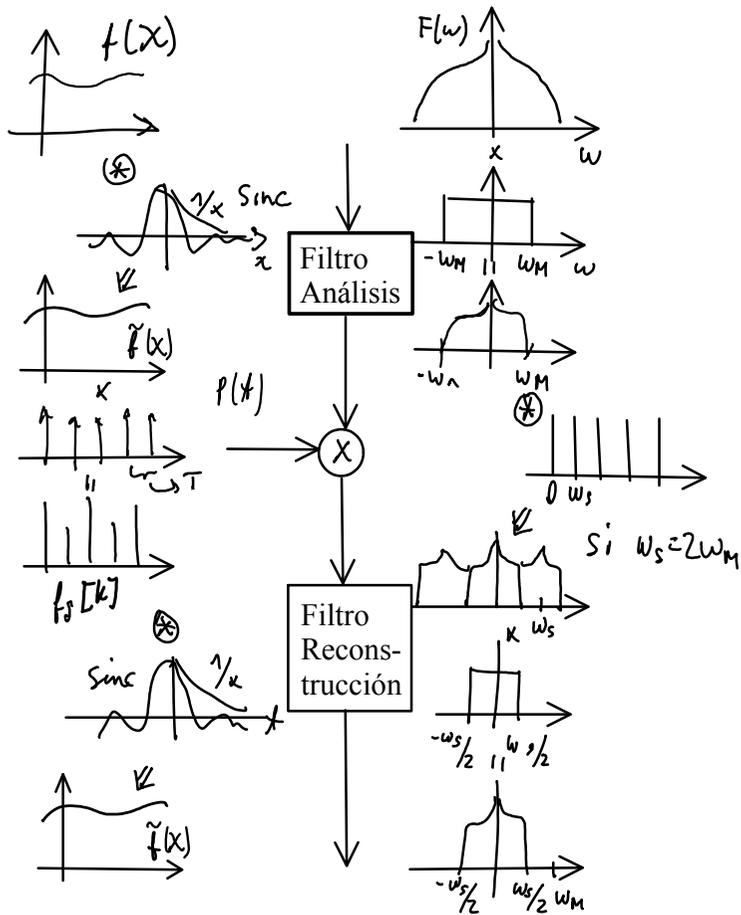
"aliasing": una superposición en frecuencia

$$\omega_s - \omega_M < \omega_M$$

$$\Rightarrow \omega_s < 2\omega_M$$

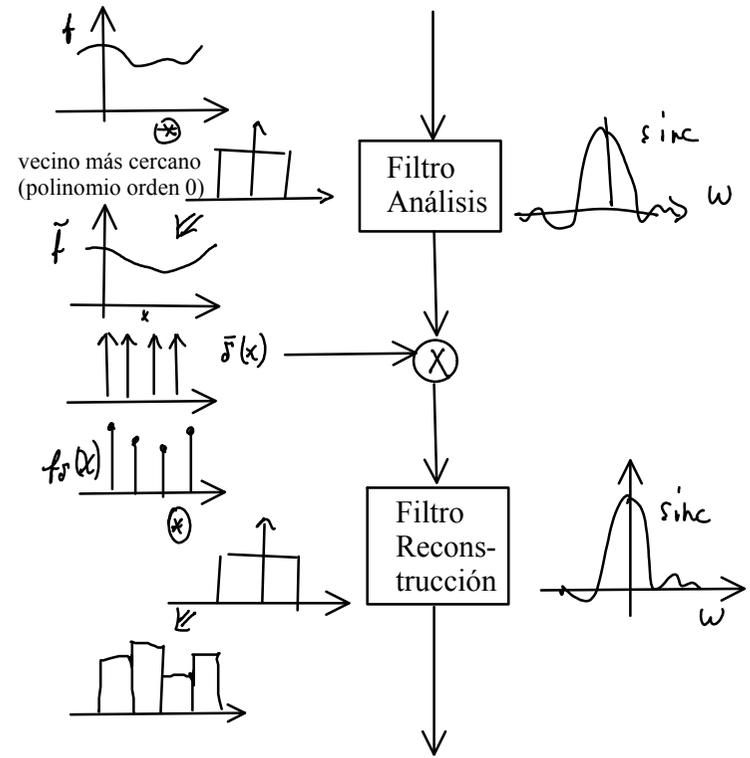
2.7 Ejemplo de Diferentes Reconstrucciones

El esquema completo para el caso ideal, utiliza un filtro pasa-bajos ideal donde la reconstrucción sería

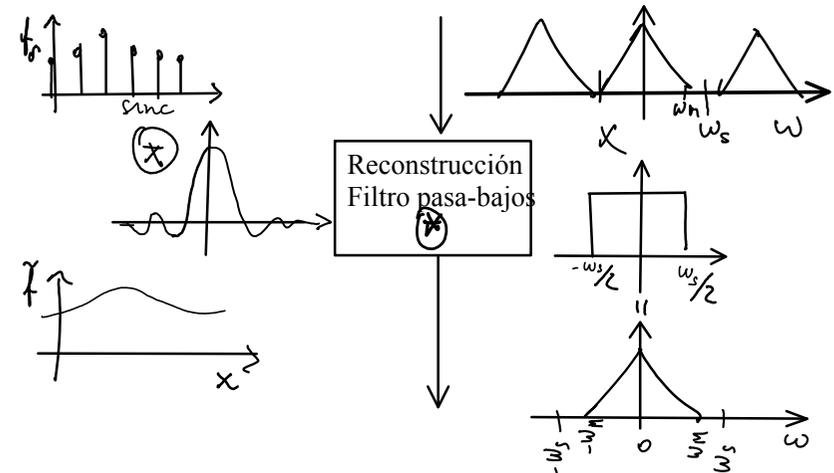


ω_s : frecuencia de Nyquist

El esquema completo para el caso discretización continua a trazos, utiliza un filtro sinc donde la reconstrucción sería



Recordando el caso del filtro pasa-bajos ideal, la reconstrucción sería

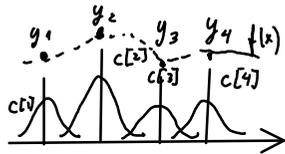


2.8 Representación de señales análogas mediante imágenes digitales

2.8.1 Espacios invariantes a la traslación entera

Tenemos un espacio generado por la traslación y el escalamiento de una función ϕ

$$f(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c[l] \phi(x-l)$$



Al tener valores discretos $y[k]$, se puede interpolar estos valores mediante la relación $\vec{y} = \Phi \vec{c}$

$$y[k] = f(x)_{|x=k}, k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y[k] = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c[l] \phi(k-l)$$

$$\text{sea } p[l] = \phi(l), l \in \mathbb{Z} \Rightarrow y[k] = c * p[k]$$

$$c[l] = (p^{-1}) * y[l]$$

Si queremos encontrar el kernel (función base) que interpola los valores $y[k]$, podemos expresarlo en términos del espacio generado por la traslación de la función ϕ

$$n(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} q[l] \phi(x-l) \quad l \in \mathbb{Z}$$

Para que sea una función interpoladora $n(x)_{|x=k} = \delta^1[k]$

$$\text{Por lo tanto } q[k] = (\phi^{-1})[k]$$

ya la func. cardinal $n(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (\phi^{-1})[l] \phi(x-l)$

$$(\phi) * p[k] = \delta^1[k]$$



2.8.2 Cálculo de B-splines

Propiedades generales

$$\int_{x \in \mathbb{R}} \beta^n(x-l) = 1$$

$$\beta^n \in C^{n-2}(\mathbb{R})$$

$$\partial \beta^n / \partial x = \beta^{n-1}(x + 1/2) - \beta^{n-1}(x - 1/2)$$

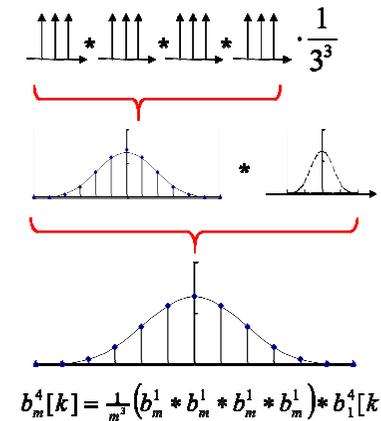
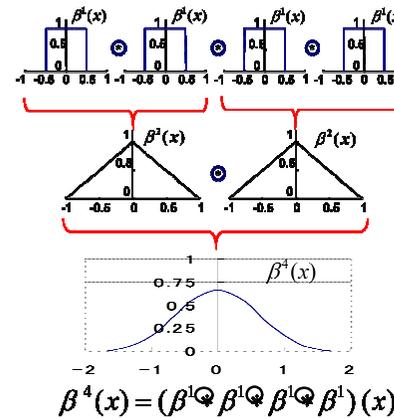
Propiedades de aproximación

$$\sum_{l \in \mathbb{Z}} \beta(x-l) = 1, \forall x \in \mathbb{R}$$



$$\text{Error}(f, \tilde{f}) \propto \kappa_\phi \cdot T^L, \text{ con } T \rightarrow 0$$

T: intervalo de muestreo, L: potencia de aprox



$$\beta^1(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{1}{2} \\ 0, & \sim \end{cases} \in C^{-1}$$

$$b_m^1[k] = \begin{cases} 1, & 0 \leq k < m \\ 0, & \sim \end{cases}$$

$$\beta^2(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \leq 1 \\ 0, & \sim \end{cases} \in C^0$$

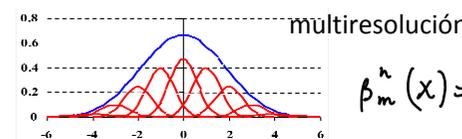
$$b_m^2[k] = \beta^2(x/m)_{|x=k}$$

$k \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{Z}$

$$\beta^4(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - x^2 + \frac{1}{2}|x|^3, & |x| < 1 \\ \frac{1}{6}(2-|x|)^3, & 1 \leq |x| < 2 \\ 0, & |x| \geq 2 \end{cases} \in C^2$$

$$b_m^4[k] = \frac{1}{m^4} (b_m^1 * b_m^1 * b_m^1 * b_m^1) * b_m^1[k]$$

n veces



$$\beta_m^n(x) = \beta^n\left(\frac{x}{m}\right) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} U_m^n[k] \beta^n(x-k)$$

2.8.3 Ejemplo de wavelets con B-spline

La descomposición por wavelets se basa en filtros pasa-bajos y filtros pasa-altos que se aplican en forma progresiva y que se basan en funciones de soporte local

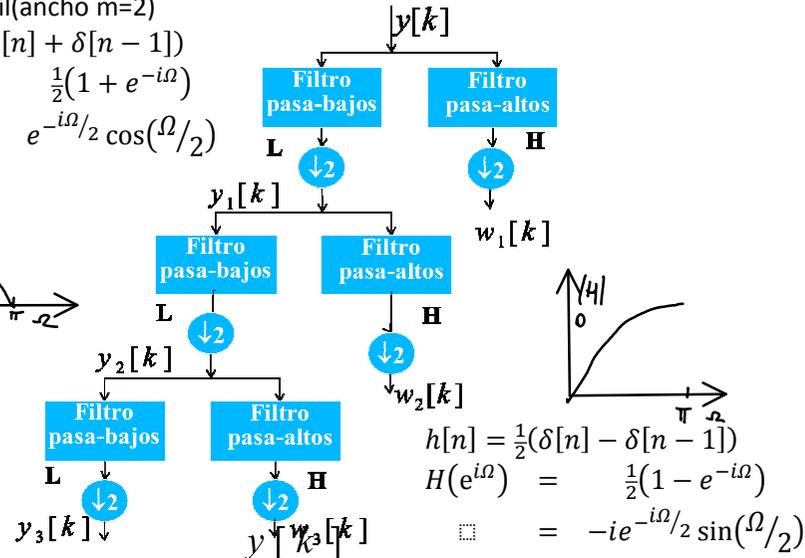
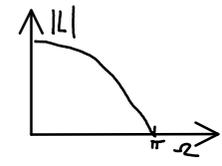
Ejemplo Haar Wavelet

media móvil(ancho m=2)

$$\mathcal{L}[n] = \frac{1}{2}(\delta[n] + \delta[n-1])$$

$$L(e^{i\Omega}) = \frac{1}{2}(1 + e^{-i\Omega})$$

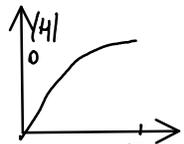
$$\square = e^{-i\Omega/2} \cos(\Omega/2)$$



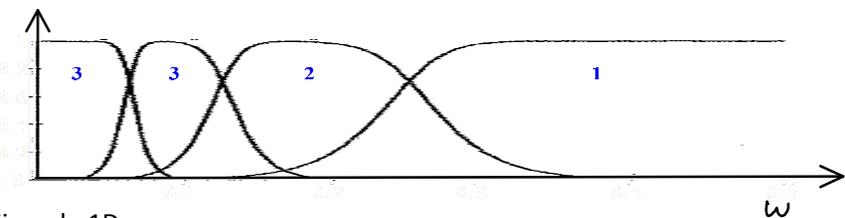
$$h[n] = \frac{1}{2}(\delta[n] - \delta[n-1])$$

$$H(e^{i\Omega}) = \frac{1}{2}(1 - e^{-i\Omega})$$

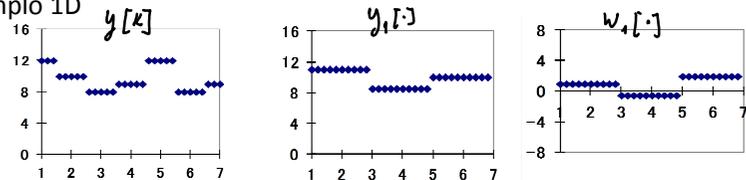
$$\square = -ie^{-i\Omega/2} \sin(\Omega/2)$$



$y_3[k]$ $w_3[k]$ $w_2[k]$ $w_1[k]$

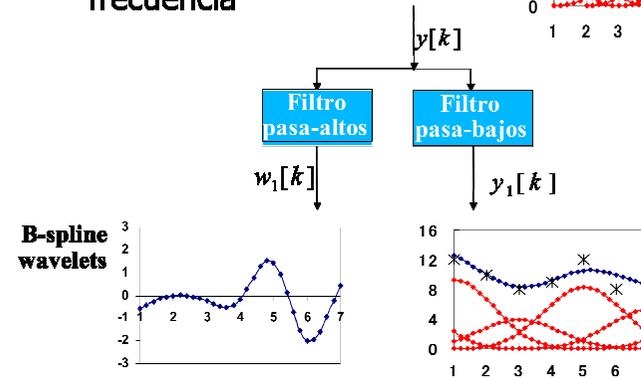
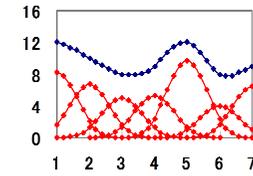


Ejemplo 1D

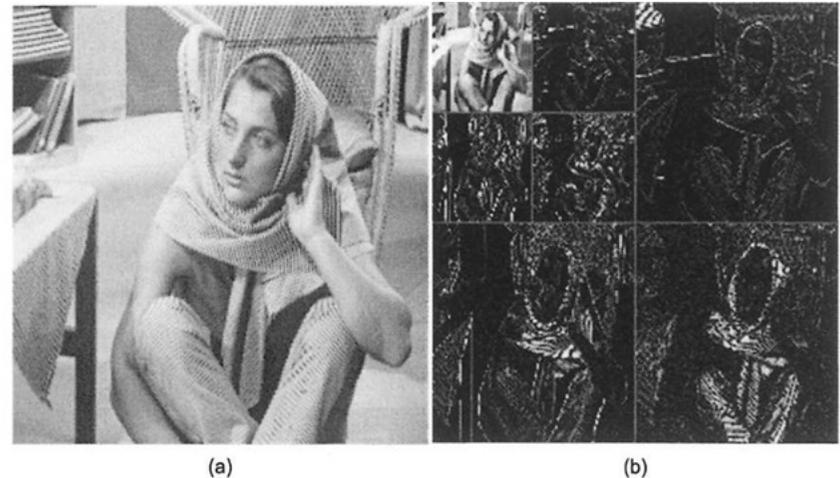


2.8.4 Ejemplo Wavelet con B-spline de orden mayor

Decomposición en diferentes canales de frecuencia

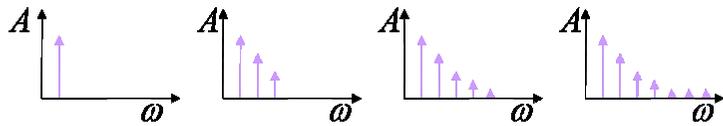
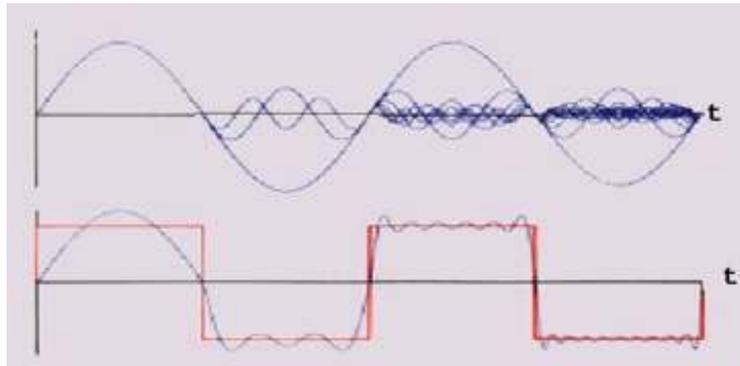


Ejemplo 2D Haar Wavelet:

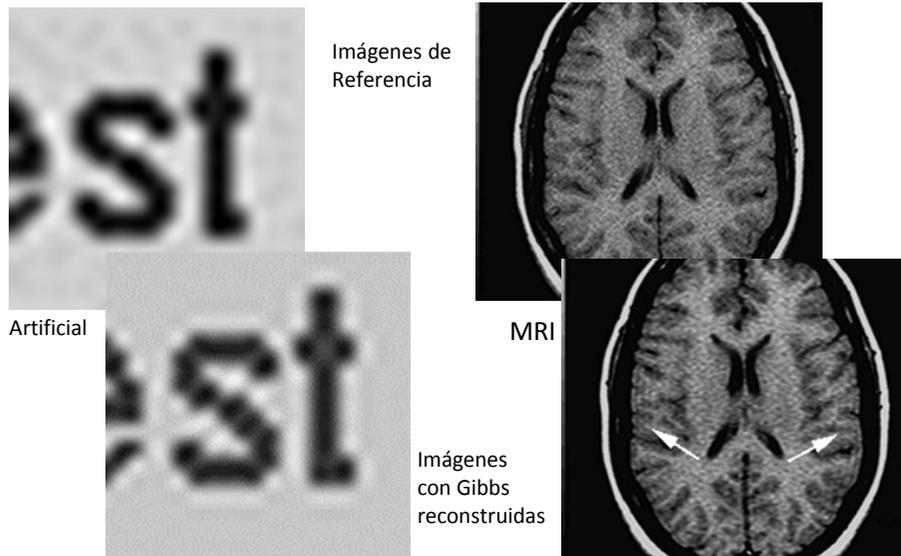


2.9 Artefactos por truncamiento de la Transformación de Fourier

Oscilaciones de Gibbs 1D



Oscilaciones de Gibbs 2D



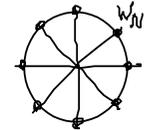
2.10 De las series de Fourier a la Transformada Discreta de Fourier

$$\bar{f}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k e^{ik\omega_0 x}$$

Si consideramos $\bar{f}(x) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k e^{ik\omega_0 x}$ y siendo N un entero arbitrario. Definimos $T_1 = T/N$, para discretizar x

$$\bar{f}(mT_1) = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k e^{ik\omega_0 mT_1} = \sum_{k \in \mathbb{Z}} C_k W_N^{km}, \quad W_N = e^{i\omega_0 T_1} = e^{i2\pi/N}$$

Donde se periodiza en frecuencia ω y se tiene la discretización del círculo unitario (en el espacio \mathbb{C})



W_N es la N -ésima raíz de 1, y puede ser escrita como $k = n + rN$ con $r \in \mathbb{Z}$ y $n \in [0, N-1]$, por lo que $W_N^{km} = W_N^{nm} W_N^{Nrm} = W_N^{nm}$

Por lo tanto

$$\begin{aligned} \bar{f}(mT_1) &= \sum_{n=0}^{N-1} \sum_{r=-\infty}^{\infty} C_{n+rN} W_N^{nm} = \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nm} \left(\sum_{r \in \mathbb{Z}} C_{n+rN} \right) \\ &= \sum_{n=0}^{N-1} W_N^{nm} \bar{c}_n \end{aligned}$$

← Coeficientes con aliasing

$$\bar{f}(mT_1) = \frac{1}{T} \sum_{n=0}^{N-1} \bar{F}(n\omega_0) W_N^{nm}, \quad W_N = e^{i2\pi/N}, \quad m = 0, \dots, N-1$$

Teorema fundamental con $T_1 = T/N, \omega_0 = 2\pi/T \Rightarrow \omega_1 = N\omega_0$

$$\bar{f}(x) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} f(x + nT) \quad y \quad \bar{F}(\omega) = \sum_{m \in \mathbb{Z}} F(\omega + m\omega_1)$$

y utilizando $\bar{c}_n = \bar{f}(nT_1), \bar{C}_k = \bar{F}(kT)$

La transformación discreta de Fourier (DFT) es

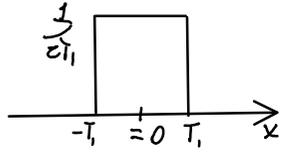
$$\bar{C}_k = \sum_{n=0}^{N-1} \bar{c}_n W_N^{-nk}$$

y la transformación inversa

$$\bar{c}_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^{N-1} \bar{C}_k W_N^{nk}$$

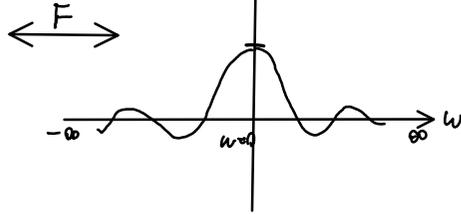
a) Ejemplo pulso cuadrado

$$h(x) = \begin{cases} \frac{1}{2T_1} & |x| < T_1 \\ 0 & \sim \end{cases}$$



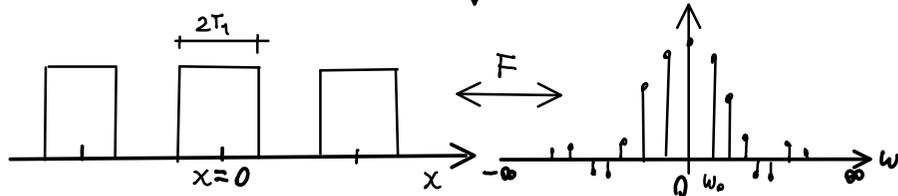
Función no periódica

$$H(\omega) = 2T_1 \text{sinc}(\omega T_1)$$



Series Fourier

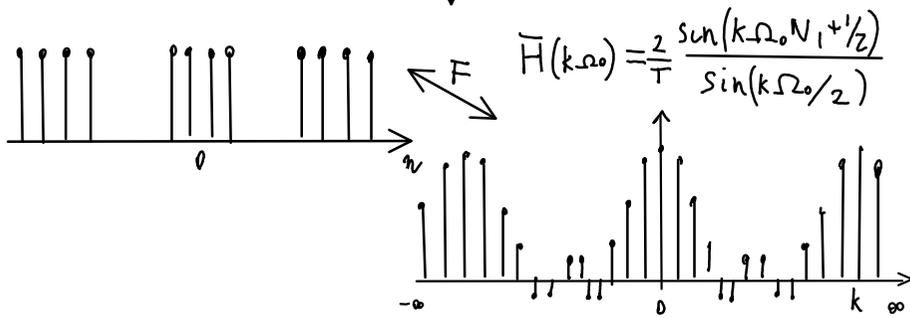
Muestreo (discretización frecuencia)



$$\omega_0 = \frac{2\pi}{T} \text{ Función periódica (serie de Fourier)}$$

$$H(k\omega_0) = \frac{2}{T} T_1 \text{sinc}(k\omega_0 T_1)$$

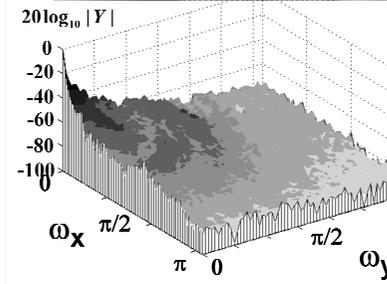
Muestreo (discretización tiempo)



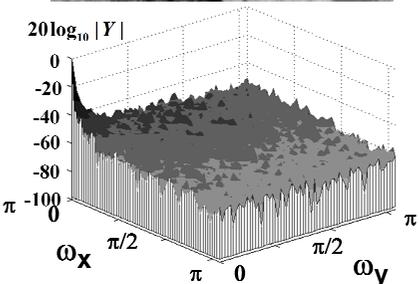
Función discreta periódica (serie discreta de Fourier)

b) Ejemplos 2D de la transformada Discreta de Fourier

- Características de amplitud de algunas imágenes 2D



(a) Barbara

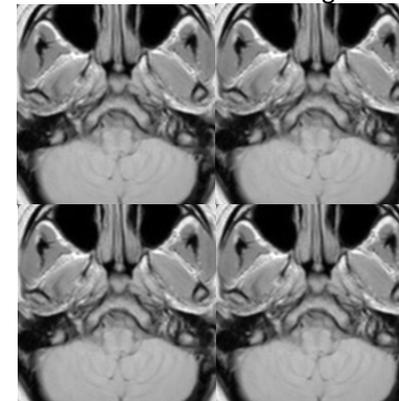


(b) Baboon

- Periodicidad de la función representada por series de Fourier

Por lo tanto, al obtener la transformada de Fourier de un segmento de la imagen, hay que considerar que esta imagen es periódica

Señal original



Transformación de Fourier 2D

