

### 3. Procesamiento Digital de Imágenes

#### 3.1 Transformada discreta de Fourier en 2D

Una señal periódica con períodos  $N_1$  y  $N_2$  en sus coordenadas  $x_1$  y  $x_2$ , respectivamente, tiene una transformada de Fourier definida como

$$\bar{F}[k_1, k_2] = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} \bar{f}[n_1, n_2] W_{N_1}^{-k_1 n_1} W_{N_2}^{-k_2 n_2} \quad W_{N_l} = e^{i2\pi / N_l}, l = 1, 2$$

y una transformada inversa

$$\bar{f}[n_1, n_2] = \frac{1}{N_1 N_2} \sum_{k_1=0}^{N_1-1} \sum_{k_2=0}^{N_2-1} \bar{F}[k_1, k_2] W_{N_1}^{k_1 n_1} W_{N_2}^{k_2 n_2}$$

#### 3.2 Convoluciones discretas en 2D

Una convolución discreta en 2D se puede definir como

$$f_1 * f_2[n_1, n_2] = \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} f_1[k_1, k_2] f_2[n_1 - k_1, n_2 - k_2]$$

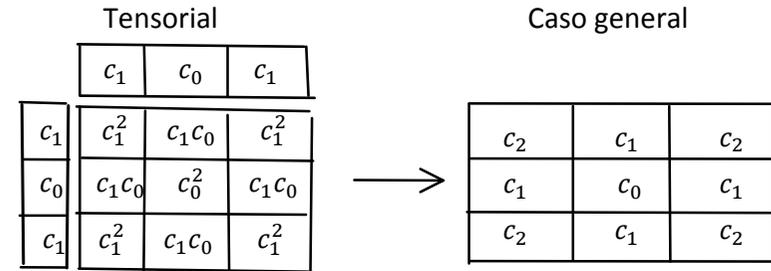
Si  $f_2$  es un filtro separable de manera que el cálculo de la convolución se reduce a  $f_2[n_1, n_2] = f_{21}[n_1] \cdot f_{22}[n_2]$

$$f_1 * f_2[n_1, n_2] = \sum_{k_2 \in \mathbb{Z}} f_{22}[n_2 - k_2] \underbrace{\left\{ \sum_{k_1 \in \mathbb{Z}} f_1[k_1, k_2] f_{21}[n_1 - k_1] \right\}}_{f_{12}[n_1, k_2]}$$

Lo que significa que la convolución se puede calcular primero a lo largo de las filas y luego a lo largo de las columnas en forma consecutiva (en cascada). A este tipo de funciones las denominaremos funciones de producto tensorial.

Notar que en el caso de las transformadas de Fourier tanto discretas como continuas, el cálculo siempre se puede aplicar en a lo largo de las filas y luego a lo largo de las columnas en forma consecutiva. En el caso de los filtros en 2D solamente los filtros que se pueden descomponer en producto tensorial pueden ser calculados en forma independiente.

#### 3.3 Ejemplo de funciones de máscara en 2D (soporte compacto)



Las máscaras son simétricas de modo que la fase de éstas sea cero o sea lineal.

Si se tiene una función desplazada y si

$$f[n_1, n_2] \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{F}[k_1, k_2] = \sum_{n_1=0}^{N_1-1} \sum_{n_2=0}^{N_2-1} f[n_1, n_2] W_{N_1}^{-k_1 n_1} W_{N_2}^{-k_2 n_2} \in \mathbb{R}$$

Entonces tiene fase cero:  $\angle \hat{F}[k_1, k_2] = 0$

y cualquier función trasladada

$$f[n_1 - m_1, n_2 - m_2] \xrightarrow{\mathcal{F}} \hat{F}[k_1, k_2] \underbrace{W_{N_1}^{k_1 m_1} W_{N_2}^{k_2 m_2}}_{\text{Fase lineal en } k_1 \text{ y } k_2}$$

Pues tenemos que  $\angle W_{N_1}^{k_1 m_1} = (2\pi k_1 m_1)/N_1$  y  $\angle W_{N_2}^{k_2 m_2} = (2\pi k_2 m_2)/N_2$

son funciones lineales en  $k_1$  y  $k_2$ , respectivamente

Por otro lado,  $|W_{N_1}^{k_1 m_1}| = 1$ ,  $|W_{N_2}^{k_2 m_2}| = 1$

Recordar que en 1D, si  $\angle F(k) = 0$ , entonces  $f[n]$  es función par



Para hacer un análisis de los filtros, conviene utilizar la transformada de Fourier de señales discretas será:

$$\hat{F}(\Omega_1, \Omega_2) = \sum_{n_1 \in \mathbb{Z}} \sum_{n_2 \in \mathbb{Z}} f[n_1, n_2] e^{-i\Omega_1 n_1} e^{-i\Omega_2 n_2}$$

Que es una función periódica con período  $2\pi$

Es deseable tener filtros  $h()$  lo más isotrópicos (simetría circular, invariantes ante la traslación), porque si la imagen es obtenida en forma rotada, lo ideal es que el filtro no privilegie en especial ninguna orientación.

### 3.4 Generalizando las respuestas de frecuencia

Si se tiene una señal en el espacio de Fourier

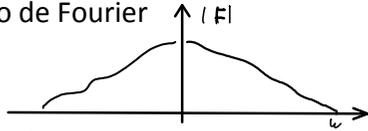


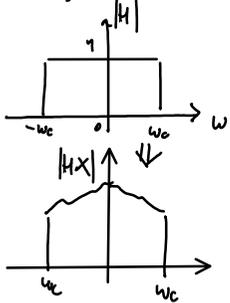
Imagen original



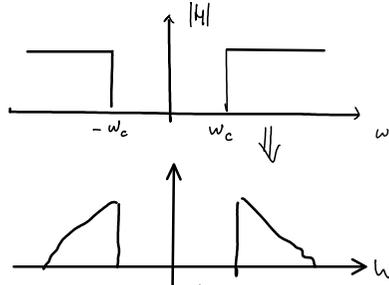
Recordar la propiedad

$$f_1 \neq f_2(x) \leftrightarrow F_1(\omega) \cdot F_2(\omega)$$

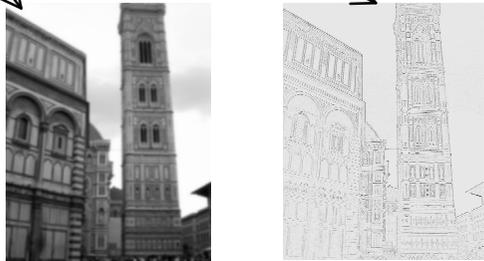
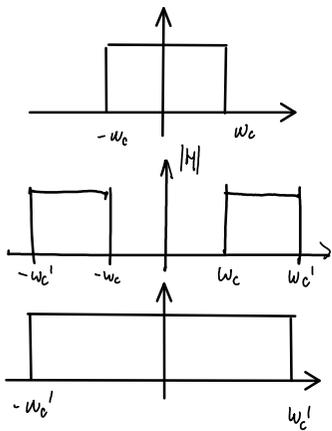
Filtro pasabajos



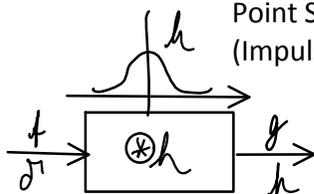
Filtro pasa-altos



Otro filtro: pasabanda



Point Spread Function (Impulse Response)



Inverse function

$$h^\dagger \otimes h = \delta$$

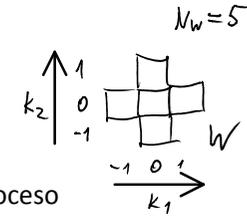
Una forma de generar un filtro pasa-bajos

$$h_{HP}(t) = \delta(t) - h_{LP}(t) \leftrightarrow H_{HP}(\omega) = 1 - H_{LP}(\omega)$$

### 3.5 Filtrado de imágenes - Operaciones espaciales

**3.5.1 Filtro de Media:** un filtro de media se puede definir como

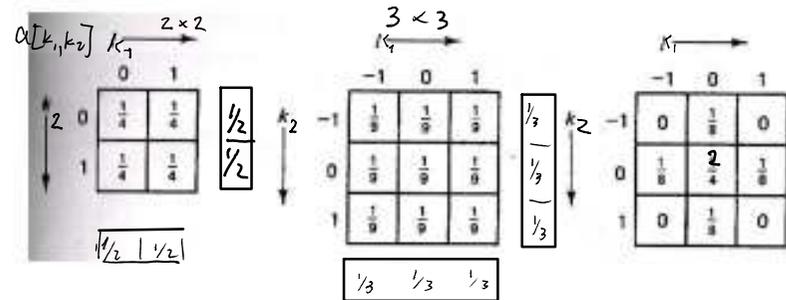
$$g(n_1, n_2) = \frac{1}{N_w} \sum_{(k_1, k_2) \in W} f(n_1 - k_1, n_2 - k_2)$$



donde W es la región de la ventana donde el proceso es equivalente a una media móvil, siendo un caso específico de filtro pasa-bajos.

**3.5.2 Filtros pasa-bajos:** Recordemos que una máscara (filtro) se aplica según

$$g(n_1, n_2) = \sum_{(k_1, k_2) \in W} c[k_1, k_2] f[n_1 - k_1, n_2 - k_2]$$



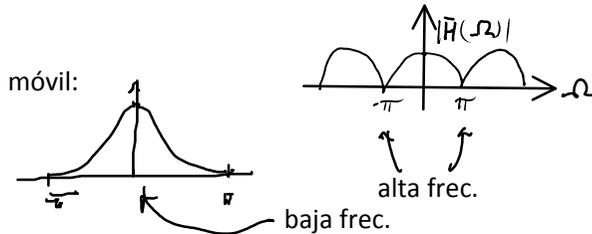
**Caso 1D**

**Respuesta de frecuencia:**

$$\bar{H}(\Omega) = (2c_1 \cos \Omega + c_0)$$

Ejemplo  $c_0 = 0$

Ejemplo media móvil:  
 $c_0 = c_1 = 1/3$



## Caso 2D

### 1. Producto tensorial 3x3

	$c_1$	$c_0$	$c_1$
$c_1$	$c_1^2$	$c_1 c_0$	$c_1^2$
$c_0$	$c_1 c_0$	$c_0^2$	$c_1 c_0$
$c_1$	$c_1^2$	$c_1 c_0$	$c_1^2$

$$\bar{H}(\Omega_1, \Omega_2) = (2c_1 \cos \Omega_1 + c_0) \cdot (2c_1 \cos \Omega_2 + c_0)$$

$$|\Omega_1|, |\Omega_2| \leq \pi$$

es una función periódica

### 2. Máscara 3x3 Genérica (simétrica)

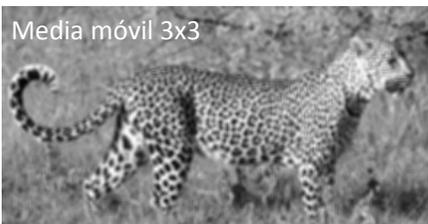
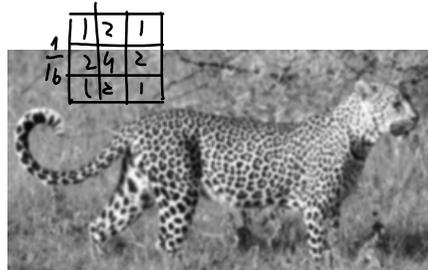
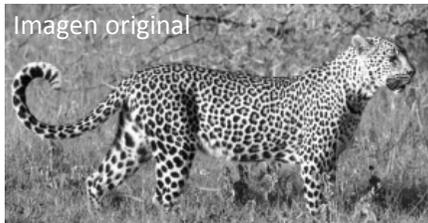
$c_2$	$c_1$	$c_2$
$c_1$	$c_0$	$c_1$
$c_2$	$c_1$	$c_2$

Con la relación de la frecuencia para funciones discretas

$$\Omega_1 = \omega_1 T_1, \quad \Omega_2 = \omega_2 T_2$$

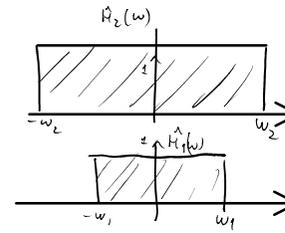
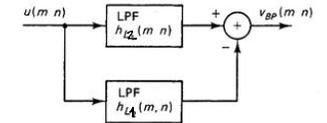
$$\begin{aligned} \bar{H}(\Omega_1, \Omega_2) &= c_0 + c_1 (2 \cos \Omega_1 + 2 \cos \Omega_2) + c_2 2 \cos \Omega_1 2 \cos \Omega_2 \\ &= c_0 + 2c_1 (\cos \Omega_1 + \cos \Omega_2) + 4c_2 \cos \Omega_1 \cos \Omega_2 \end{aligned}$$

Ejemplos:



### 3.6 Otros ejemplos de filtros 2D

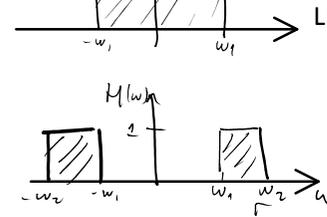
Diferencia de filtros pasa-bajos:



LPF: máscara corta  
igual fase en  $|\omega| < \omega_c$

$$h_{LP}(n_1, n_2) = h_2(n_1, n_2) - h_1(n_1, n_2)$$

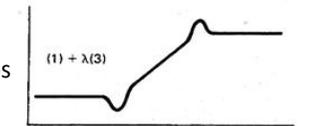
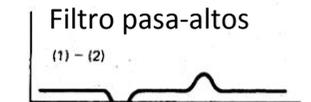
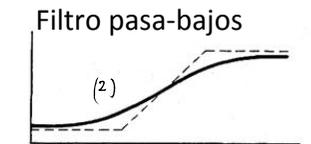
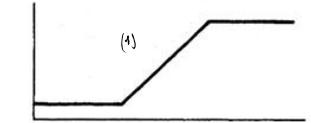
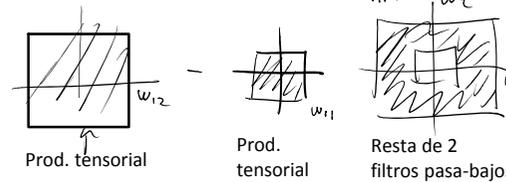
$h_1$  es típicamente de extensión larga y  $h_2$  es un filtro de extensión corta



LPF: máscara larga

Filtro pasa-banda ideal

En 2D



En general utilizaremos productos tensoriales en los filtros. Hay formas de diseñar respuestas de frecuencia en 1D y extender al en forma radial: Transf. de McLellan

### Ejemplos

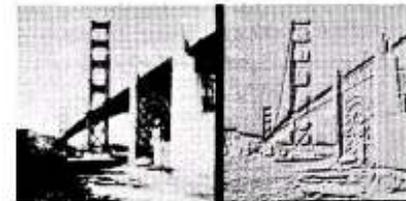
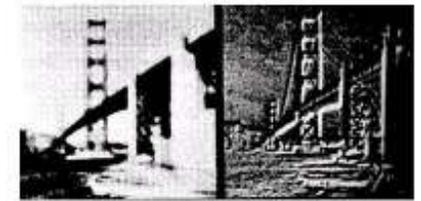


Imagen original

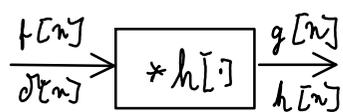
con filtro pasa-altos



con filtro pasa-bajos

con filtro pasa-banda

### 3.7 Filtrado pasa-bajos 2D



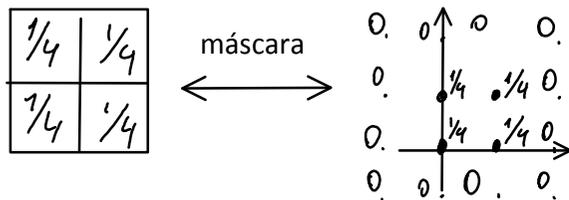
$$\delta[n] = \begin{cases} 1 & n = 0 \\ 0 & n \neq 0 \end{cases}$$

$$g[n_1, n_2] = \frac{1}{4} \{f[n_1, n_2] + f[n_1, n_2 - 1] + f[n_1 - 1, n_2] + f[n_1 - 1, n_2 - 1]\}$$

Si  $h[n_1, n_2] = \begin{cases} 1/4, & 0 \leq n_1 \leq 1, & 0 \leq n_2 \leq 1 \\ 0, & \sim \end{cases}$

$$g[n_1, n_2] = h * f[n_1, n_2]$$

$$\square = \sum_{k_1, k_2 \in \mathbb{Z}} h[n_1 - k_1, n_2 - k_2] f[k_1, k_2]$$



$$h[n_1, n_2] = \frac{1}{4} \{ \delta[n_1, n_2] + \delta[n_1, n_2 - 1] + \delta[n_1 - 1, n_2] + \delta[n_1 - 1, n_2 - 1] \}$$

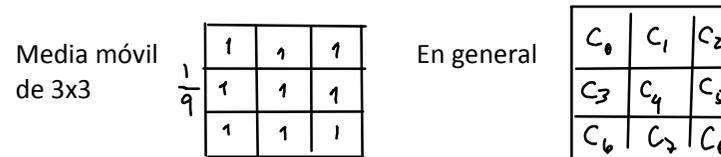
$$\begin{aligned} \bar{H}(\Omega_1, \Omega_2) &= \frac{1}{4} (1 + e^{-i\Omega_2} + e^{-i\Omega_1} + e^{-i(\Omega_1 + \Omega_2)}) \\ &= \frac{1}{4} (1 + e^{-i\Omega_2})(1 + e^{-i\Omega_1}) \\ &= \cos\left(\frac{\Omega_1}{2}\right) \cos\left(\frac{\Omega_2}{2}\right) e^{-i(\Omega_1 + \Omega_2)/2} \end{aligned}$$

Amplitud

Fase

$$|\bar{H}(\Omega_1, \Omega_2)| = \left| \cos\frac{\Omega_1}{2} \cos\frac{\Omega_2}{2} \right|, \quad \angle H(e^{i\Omega_1}, e^{i\Omega_2}) = -\frac{\Omega_1 + \Omega_2}{2}$$

### Otros ejemplos 2D



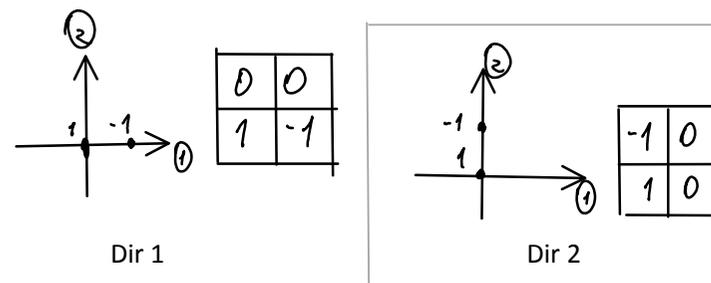
### 3.8 Filtrado mediante diferenciación en 2D

Derivadas direccionales, diferencia en

a) Dirección 1:  $g[n_1, n_2] = f[n_1, n_2] - f[n_1 - 1, n_2]$

$$\downarrow f \equiv \delta$$

$$h[n_1, n_2] = \delta[n_1, n_2] - \delta[n_1 - 1, n_2]$$



b) Dirección 2:  $g[n_1, n_2] = f[n_1, n_2] - f[n_1, n_2 - 1]$

$$\downarrow f \equiv \delta$$

$$h[n_1, n_2] = \delta[n_1, n_2] - \delta[n_1, n_2 - 1]$$

### 3.8 Ejemplo de convolución

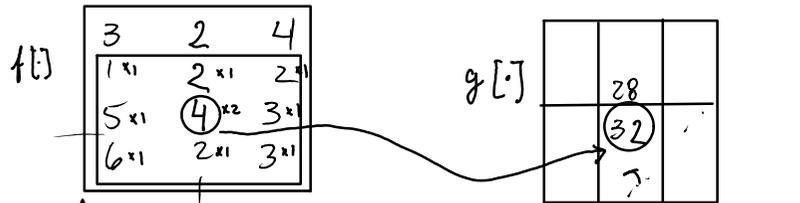
Usando la máscara:

$$h[\cdot] = \begin{bmatrix} c_2 & c_1 & c_2 \\ c_1 & c_0 & c_1 \\ c_2 & c_1 & c_2 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

sobre la imagen

$$\bar{H}(\Omega_1, \Omega_2) = 2 + 2(\cos \Omega_1 + \cos \Omega_2) + 4 \cos \Omega_1 \cos \Omega_2$$

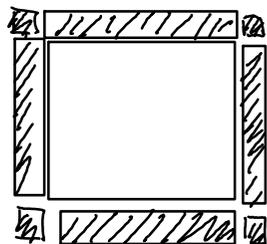


Espejo half-sample

$$\begin{bmatrix} 3 & 3 & 2 \\ 3 & 3 & 2 \\ 1 & 1 & 2 \\ 5 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$

Espejo full-sample

$$\begin{bmatrix} 2 & 1 & 2 \\ 2 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 2 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$$



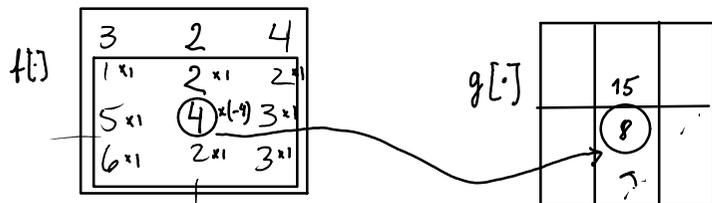
Hay que rellenar los bordes según criterio de borde (half-, full-sample)



Otro ejemplo:

$$h[\cdot] = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$g[k_1, k_2] = \{f[k_1 - 1, k_2] + f[k_1, k_2 - 1] + f[k_1 + 1, k_2] + f[k_1, k_2 + 1] - 4f[k_1, k_2]\}$$



### 3.9 Ejemplos con imágenes médicas

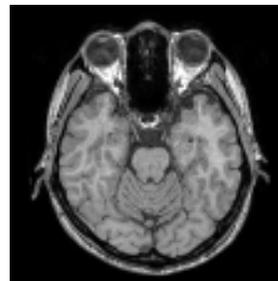
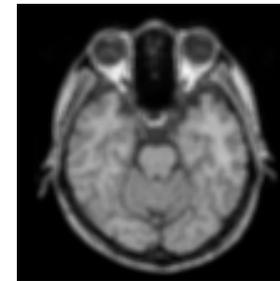


Imagen original



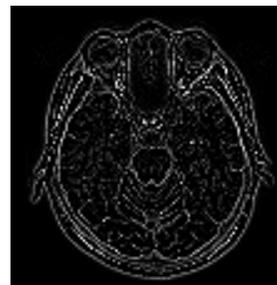
Media móvil 3x3

Filtro pasa-altos

$2 * (\text{Orig} - \text{LPF} 3 \times 3)$

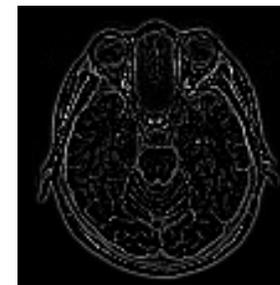


Filtro Laplaciano



Discretización  
1er orden

$$h = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & -4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$



Discretización orden  
superior

$$h = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/2 & 1/4 \\ 1/2 & -3 & 1/2 \\ 1/4 & 1/2 & 1/4 \end{bmatrix}$$