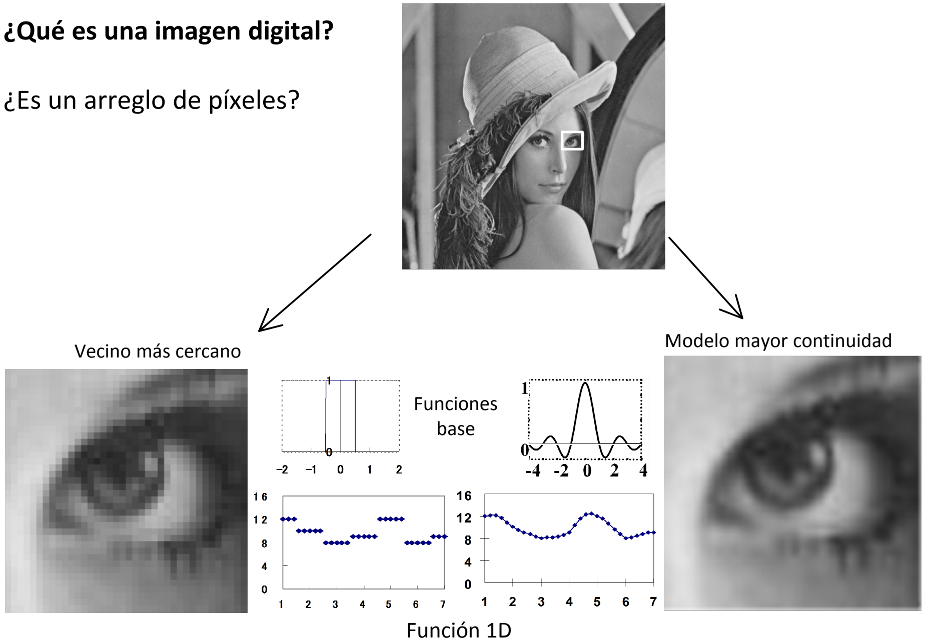
1. Sistemas Lineales e Invariantes a la Traslación

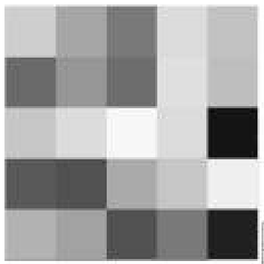
1.1 Motivación de las imágenes digitales

¿Qué es una imagen digital?

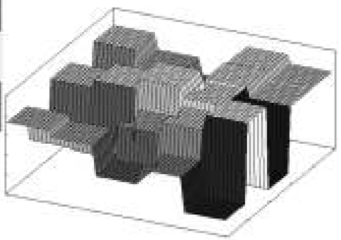
¿Es un arreglo de píxeles?



Detalle de una imagen digital



Modelo basado en píxeles
(constante por área cuadrada)

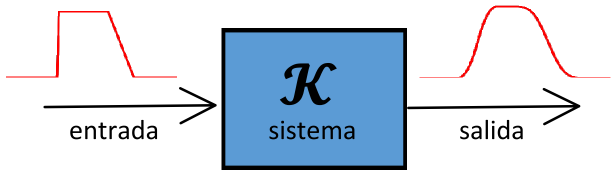


El hecho que se trabaja con imágenes digitales tiene que ser considerado al momento de implementar el procesamiento de esas imágenes.

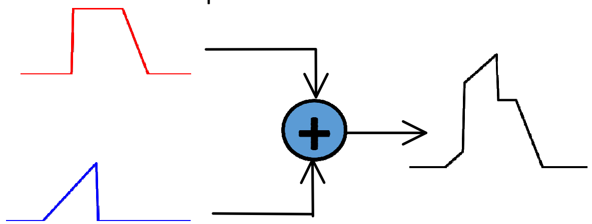
1.2 Sistemas lineales

1.2.1 Ejemplo de Sistemas Lineales

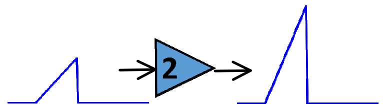
a) **Sistema:** un sistema realiza una transformación sobre un objeto de entrada, generando una salida



b) **Suma:** dos funciones se pueden sumar

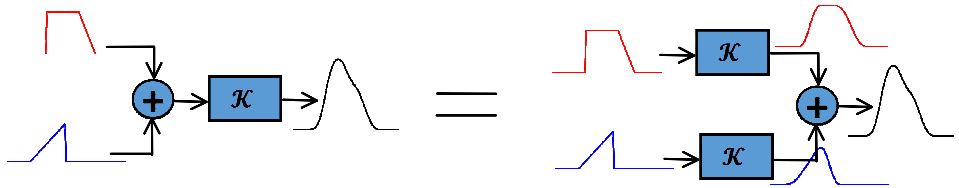


c) **Escalamiento:** una función se puede escalar por un factor constante

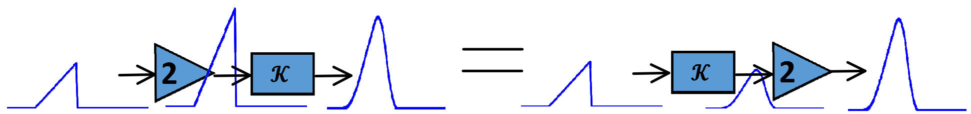


d) Un sistema es lineal cuando se cumplen 2 condiciones:

1. Cuando la transformación de una suma es la suma de las transformaciones:



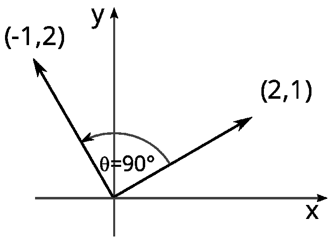
2. Cuando la transformación de un escalamiento es el escalamiento de la transformación



1.2.2 Ejemplo de sistemas lineales

Se tiene un vector $\begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$ y lo rotamos en 90º a favor de los puteros del reloj, el resultado es $\begin{bmatrix} -y \\ x \end{bmatrix}$. Esta transformación se puede representar con una matriz de la forma $\begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$.

Ejemplo $\begin{bmatrix} -1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix}$



Recordemos que la multiplicación entre una matriz **K** y un vector se calcula de la siguiente forma $\underbrace{\begin{bmatrix} k_{1,1} & k_{1,2} \\ k_{2,1} & k_{2,2} \end{bmatrix}}_{\mathbf{K}} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} k_{1,1}x + k_{1,2}y \\ k_{2,1}x + k_{2,2}y \end{bmatrix}$

Para el caso específico de una rotación en un ángulo θ,
la matriz es $\mathrm{R}_\theta = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix}$

Supongamos que tenemos 2 vectores $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix}$ y $\begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$, los cuales se suman y se aplica la transformación $\mathrm{R}(\theta)$:

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \left\{ \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\}$$
$$= \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix}$$
$$= \left\{ \mathrm{R}_\theta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right\} + \left\{ \mathrm{R}_\theta \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\}$$

La transformación de la suma es igual a la suma de las trasformaciones sobre cada vector en forma individual.

Por otro lado, si es escala uno de los vectores

$$\begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \left\{ \alpha_1 \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right\} = \alpha_1 \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -\mathrm{sen}(\theta) \\ \mathrm{sen}(\theta) & \cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} = \alpha_1 \left\{ \mathrm{R}_\theta \begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \end{bmatrix} \right\}$$

La transformación de un vector escalado es igual al escalamiento de la transformación del vector.
Con estas 2 propiedades se verifica que la transformación $\mathrm{R}(\theta)$ es lineal.

1.2.3 Propiedad de Linealidad en matemáticas

Se tiene $g(x) = \mathcal{K}\big(f(x)\big)$

Linealidad Si $f_1 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $f_2 : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ **y** $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{C}$**, siendo** $\kappa : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$

$$\kappa\{\alpha_1 f_1(x) + \alpha_2 f_2(x)\} = \alpha_1 \kappa\{f_1(x)\} + \alpha_2 \kappa\{f_2(x)\}$$

entonces κ es una operación lineal

En general, si $g_i(x) = \kappa\big(f_i(x)\big) \quad i = 1, \dots, N$

Para la linealidad $\kappa\left(\sum_{i=1}^{N} \alpha_i f_i(x)\right) = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i g_i(x)$

Una representación $g(x) = \int_\Omega K(x,y) f(y)\, dy$

De hecho

$$\int_\Omega K(x,y) \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \alpha_i f_i(y)\, \mathrm{d}y = \sum_{i=1}^{\mathrm{N}} \alpha_i \int_\Omega K(x,y) f_i(y) dy$$
$$= \sum_{i=1}^{N} \alpha_i g_i(x)$$

cumple con la condición de linealidad

La versión discreta $g[n] = \sum_{l \in \Omega} K[n,l] f[l]$

La versión matricial es

$$\begin{bmatrix} g_1 \\ g_2 \\ \vdots \\ g_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} K_{1,1} & K_{1,2} & \cdots & K_{1,L} \\ \vdots & \ddots & \iddots & \vdots \\ \vdots & \iddots & \ddots & \vdots \\ K_{N,1} & \cdots & \cdots & K_{N,L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_L \end{bmatrix}$$

1.3 Sistemas lineales e invariantes a la traslación

Un sistema invariante a la traslación es aquel que entregará el mismo resultado (en forma) ante una entrada, independiente de cuándo (en función del tiempo *t*) o en qué posición (en función de *x*) se realiza el proceso.

Si $g: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, y $\mathcal{K}$ es una transformación lineal $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, tal que $g(x) = \mathcal{K}\big(f(x)\big)$

Entonces la propiedad de invariancia a la traslación es

$$g(x - x_0) = \mathcal{K}\big(f(x - x_0)\big)$$

Al reemplazar la linealidad en la invariancia a la traslación en la parte derecha:

$$\mathcal{K}\big(f(x - x_0)\big) = \int_{\Omega} K\,(x, y) f(y - x_0) dy = \int_{\tilde{\Omega}} K(x, \tilde{y} + x_0) f(\tilde{y})\, d\tilde{y}$$

Mientras que en la izquierda $\int_{\Omega} K\,(x - x_0, y) f(y) dy = g(x - x_0)$

Para cumplir con la invariancia a la traslación y despreciando las condiciones de borde set tiene que $K(x, y + x_0) = K(x - x_0, y)$

Por esta razón, $K(x, y) = h(x - y)$

En efecto $K(x, y + x_0) = h\big(x - (y + x_0)\big) = h\big((x - x_0) - y\big) = K(x - x_o, y)$

Por lo tanto para un sistema Lineal e Invariante a la Traslación (LIT):

$$g(x) = \int_{\Omega} h\,(x - y) f(y) dy = h \circledast f(x)$$

La convolución tiene la propiedad de conmutatividad

$$h \circledast f(t) = f \circledast h(t)$$

La versión discreta $g_n = \sum_{\ell \in \Omega} h_{n-\ell}\, f_{\ell} = \sum_{\ell \in \Omega} h_{\ell} f_{n-\ell}$

$$\begin{bmatrix} \backslash & \backslash & \square \\ \backslash & \backslash & \backslash \\ \square & \backslash & \backslash \end{bmatrix}$$

m diagonales

La versión matricial

$$\begin{bmatrix} g_0 \\ g_1 \\ \vdots \\ g_{N-1} \end{bmatrix} = \begin{pmatrix} \ddots & h_1 & \cdots & \cdots & \cdot^{\cdot^{\cdot}} \\ h_{-1} & h_0 & h_1 & \ddots & \vdots \\ \cdots & h_{-1} & h_0 & h_1 & \cdots \\ \vdots & \ddots & h_{-1} & h_0 & \ddots \\ \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \cdots & \vdots & \ddots & \ddots \end{pmatrix} \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_{N-1} \end{bmatrix}$$

1.4 Convolución

Se define como la operación convolución $\circledast$ como

$$g(x) = h \circledast f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x - y) f(y)\, dy$$

1.4.1 Identidad en la convolución

Se cumple si $f \circledast \delta(x) = f(x)$

Delta de Dirac $\delta(x) = \begin{cases} \infty & x = 0 \\ 0 & x \neq 0 \end{cases}$

Y $\int_{-\infty}^{\infty} \delta(x)\, dx = 1$ Normalización

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x) \delta(x - x_0)\, \mathrm{d}x = f(x_0)$$

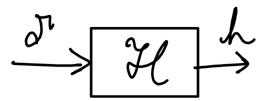
Identidad en versión vectorial

$I\vec{x} = \vec{x}$ con la identidad es $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

1.4.2 Respuesta al impulso (función de transferencia)

$h \circledast \delta(x) = h(x)$

$\mathcal{H}\{\delta(x)\} = h(x)$



h(x) viene a ser el Point Spread Function (psf)

1.4.3 Conmutatividad

La convolución tiene la propiedad de conmutatividad

$$h \circledast f(x) = f \circledast h(x)$$

Dem:

$$h \circledast f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) f(x-y)\, dy$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} f(y) h(x-y)\, dy = h \circledast f(x)$$

1.4.4 Asociatividad (bloques)

$$f \to \boxed{h_1} \to \boxed{h_2} \to g$$

$$\Downarrow$$

$$f \to \boxed{h} \to g$$

$$\begin{aligned} g(x) &= h_2 \circledast h_1 \circledast f(x) \\ &= h_2 \circledast (h_1 \circledast f)(x) \\ &= (h_2 \circledast h_1) \circledast f(x) \\ &= h \circledast f(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} h(x) &= h_1 \circledast h_2(x) \\ &= h_2 \circledast h_1(x) \end{aligned}$$

Notar que el orden de los sistemas se puede intercambiar , debido a la conmutatividad

$$f \to \boxed{h_2} \to \boxed{h_1} \to g$$

1.5 Transformación de Fourier

1.5.1 Procesamiento de sistemas LIT

Se tiene un sistema H siendo $\circledast$ la convolución

$$f(x) \longrightarrow \boxed{h \circledast} \longrightarrow g(x)$$

$$g(x) = h \circledast f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x-y) f(y)\, dy$$

usando $f(x) = e^{i\omega x}$, $i = \sqrt{-1}$

$$g(x) = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) f(x-y)\, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{\infty} h(y) \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega(x-y)}\, \mathrm{d}y$$

$$= \mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x} \int_{-\infty}^{\infty} h(y) e^{-i\omega y}\, \mathrm{d}y = \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{i}\omega x}}_{\text{entrada}} \; \underbrace{H(\omega)}_{\text{valor } \mathbb{C}}$$

con la transformación de Fourier $H(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} h(x) e^{-i\omega x}\, dx$

$h\circledast$ Valor propio

$\therefore\ f(x) = e^{i\omega x}$ es una función propia $Hf = \lambda f$

donde $H(\omega)$ son los valores propios correspondientes

La transformación inversa de Fourier es $h(x) = \dfrac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} H(\omega) e^{i\omega x}\, d\omega$

1.5.2 Propiedades de traslación de la Transformación de Fourier

$$f(x-x_0) \overset{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow} F(\omega)e^{-i\omega x_0}$$

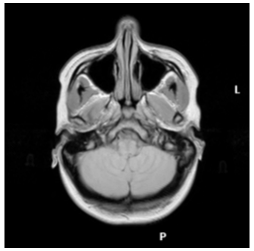
Desplazamiento en posición (o tiempo)

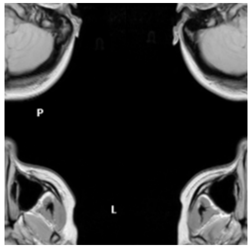
$$f(x)e^{i\omega_0 x} \overset{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow} F(\omega-\omega_0)$$

Desplazamiento en frecuencia

Ejemplo del efecto de traslación:

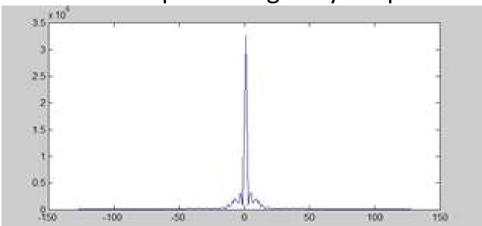
Señal Original

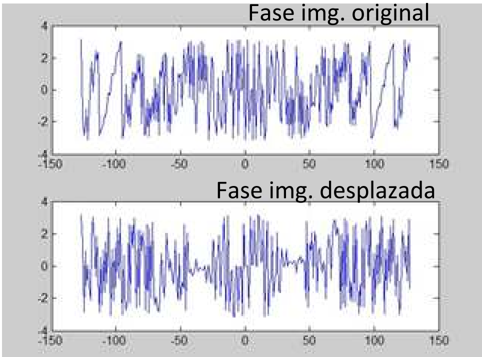


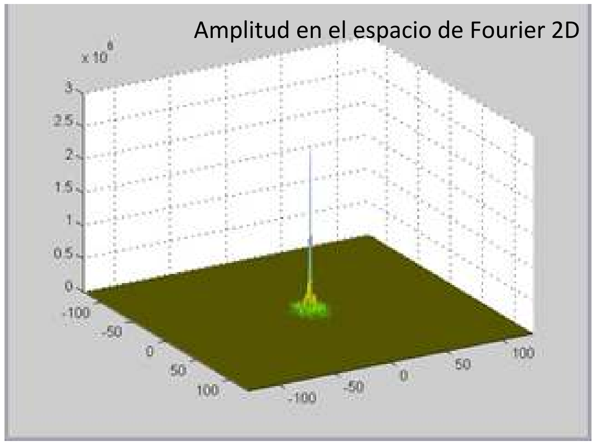


Señal Desplazada

Amplitud original y desplazada

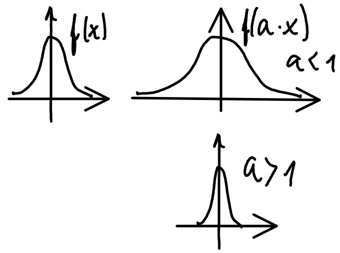






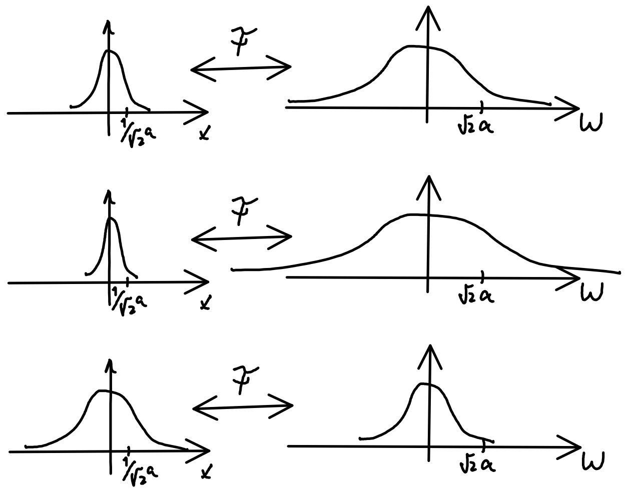
1.5.3 Escalamiento

$$f(ax) \overset{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow} \frac{1}{|a|}F\left(\frac{\omega}{a}\right)$$



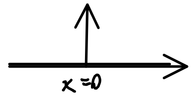
Ejemplo: una función gaussiana

$$e^{-a^2x^2} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} \frac{\sqrt{\pi}}{a}e^{-\omega^2/4a^2}$$



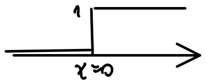
1.5.4 Ejemplos de Transformaciones de Fourier

a) *Delta de Dirac*



$$\delta(x) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \int_{-\infty}^{\infty} \delta(x) e^{i\omega x} dx = e^{i\omega \cdot 0} = 1$$

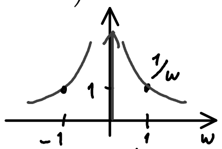
b) *Respuesta al escalón (Heaviside)*



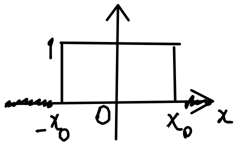
Por la transformada de una integral de una función

$$u(x) = \begin{cases} 0 \;\; si \;\; x < 0 \\ 1 \;\; si \;\; x > 0 \end{cases} \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \left(\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right) 1$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \delta(\tau) d\tau$$



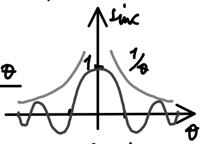
c) *Función Rectangular*



$$rect_{x_0}(x) = u(x + x_0) - u(x - x_0)$$

$$\Big\updownarrow \mathcal{F}$$

$$sinc\, \theta = \frac{sen\, \theta}{\theta}$$



$$Rect_{x_0}(\omega) = e^{i\omega x_0}\left(\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right) - e^{-i\omega x_0}\left(\frac{1}{i\omega} + \pi\delta(\omega)\right) = 2x_0\, sinc(\omega x_0)$$

d) *Función sinc:*

$$\boxed{\text{por simetría (Dualidad)} \quad F(x) \overset{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow} 2\pi f(-\omega)}$$

por lo tanto $\frac{\omega_0}{\pi}\, sinc(x\,\omega_0) \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} rect_{\omega_0}(\omega)$

e) Función constante $1 \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} 2\pi\delta(\omega)$ (Por dualidad y transf. Delta Dirac)

f) Función exponencial como

$f(x)e^{i\omega_0 x} \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} F(\omega - \omega_0)$

entonces $e^{i\omega_0 x} \overset{\mathcal{F}}{\Leftrightarrow} 2\pi\delta(\omega - \omega_0)$

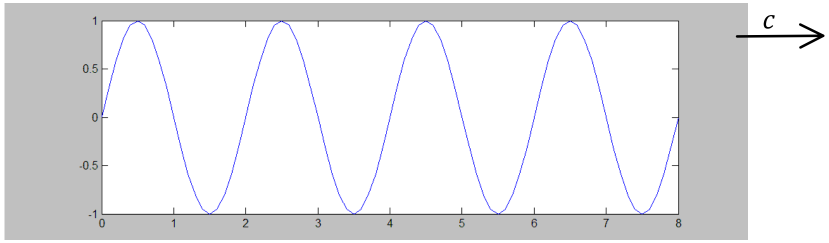
g) Para el caso del coseno

$\cos\theta = \frac{1}{2}\left(e^{i\theta} + e^{-i\theta}\right)$; $\cos\omega_0 x \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \pi\left(\delta(\omega-\omega_0) + \delta(\omega+\omega_0)\right)$

Y del seno $sin\,\theta = \frac{1}{2i}\left(e^{i\theta} - e^{-i\theta}\right)$ $sen\,\omega_0 x \overset{\mathcal{F}}{\longleftrightarrow} \frac{\pi}{i}\left(\delta(\omega-\omega_0) - \delta(\omega+\omega_0)\right)$

1.6 Las funciones sinusoidales

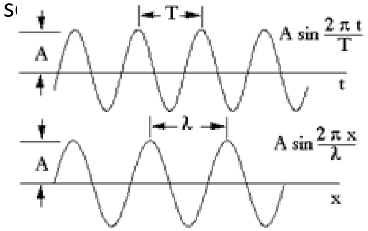
- Onda plana (viajera) que avanza en el espacio



- Está representada por la función:

  $f(x,t) = \mathrm{A}\sin(\omega t - kx)$, $\quad c = {}^{\omega}/_{k}$,
  con c siendo la velocidad de propagación

- Frecuencia: es la cantidad de ciclos que se [...] en un intervalo determinado



- Frecuencia

  Angular: $\omega = 2\pi\,/T\ [{}^{rad}/_{seg}]$

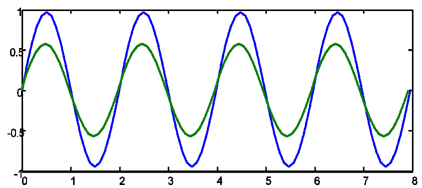
  Temporal: $\nu = {}^{1}/_{T}\left[\frac{1}{seg}\text{ ó } Hertz\right]$

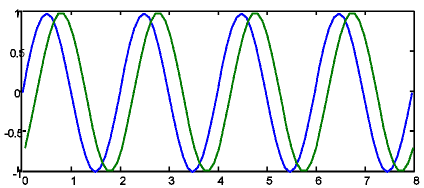
  Espacial: $k = {}^{2\pi}/_{\lambda}\left[\frac{rad}{sm}\right]$

- Representación de una señal en base a sinusoides:

$$\bar{f}_\ell(x) = A_\ell\, sin(k_\ell x + \theta_\ell)\,, \qquad k_\ell = \ell k_0$$

- Amplitud
- Fase





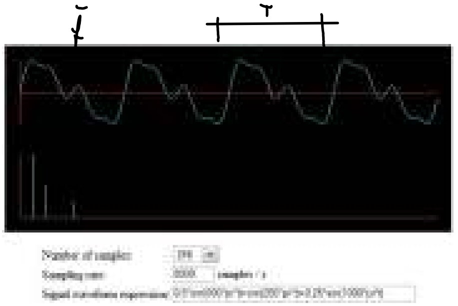
1.7 Series de Fourier

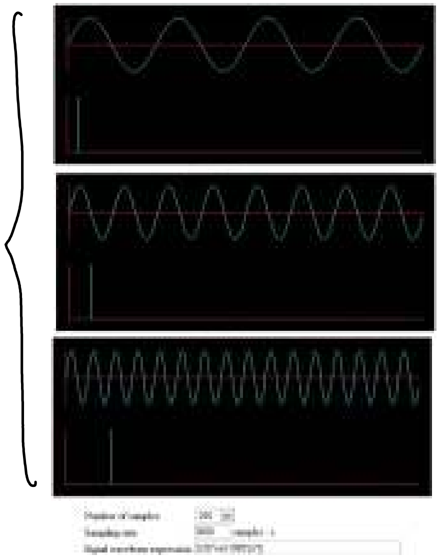
1.7.1 Suma de funciones sinusoidales

Composición de funciones sinusoidales:

$$\bar f(x) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} \bar f_\ell(x) = \sum_{\ell\in\mathbb{Z}} A_\ell \sin(k_\ell x + \theta_\ell), \qquad k_\ell = \ell k_0$$

Ejemplo: Una función continua puede descomponerse en diferentes funciones sinusoidales





Estas funciones sinusoidales se indexan por la frecuencia $k\omega_0$, especificando

la amplitud $A_k = \sqrt{(a_k)^2 + (b_k)^2}$

y la fase $\phi_k = \arctan b_k/a_k$

Una serie de Fourier se define en base a una suma de armónicos (múltiplos de una frecuencia base) de funciones periódicas (sinusoidales o exponenciales con exponente imaginaria).

$$\bar f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}_+} a_k\, cos(k\omega_0 x) + b_k\, sin(k\omega_0 x) \qquad\qquad \bar f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k e^{jk\omega_0 x}$$

función real $\bar f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ $a_k, b_k \in \mathbb{R}$, función compleja $\bar f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$, $c_k \in \mathbb{C}$

El espacio de $\bar f$ es el de las funciones periódicas, cuyo período es $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$

Notar que ésta forma de representación aparte de ser periódica, es también lineal.

1.7.2 Series de Fourier

Al definir una serie de Fourier como $\bar f(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} C_k e^{ik\omega_0 x}$, siendo una función compleja $\bar f: \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ $c_k \in \mathbb{C}$. El espacio de $\bar f$ es el de las funciones periódicas, cuyo período es $T = \frac{2\pi}{\omega_0}$.

Ocurre que si tenemos el par de Fourier $f(x) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} F(\omega)$

Entonces la relación será

$c_k = \frac{2\pi}{T} F(k\omega_o)$ y $\bar f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} f(x+nT)$

Por esta razón, al utilizar versiones discretas en el espacio de Fourier, en el espacio de la función original, ésta es periódica.

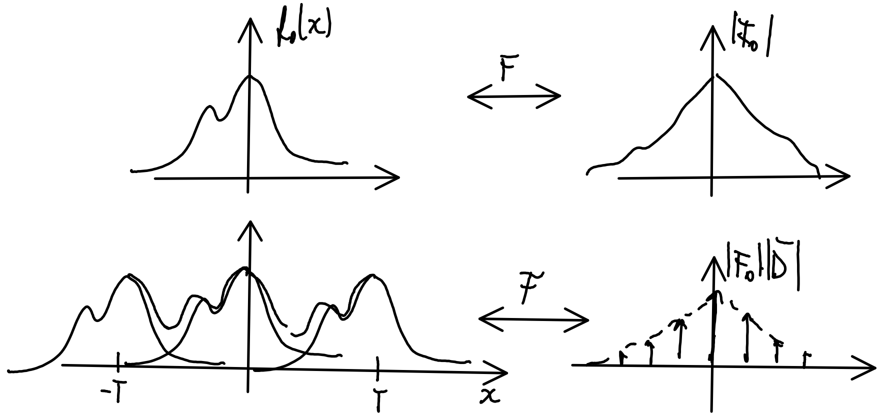
Volviendo al problema del tren de pulsos, si tenemos una función continua que es aperiódica $f_0(x) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} F_0(\omega)$, la versión periodizada $\bar f$ se puede obtener como

$$\bar f(x) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} f_0(x+nT) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \int_{-\infty}^{\infty} f_0(z)\, \delta(x+nT-z)\, dz$$

$$\bar f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f_0(z)\, \bar\delta(x-z)\, dz = f_0 \circledast \bar\delta(x)$$

$$\updownarrow \mathcal{F}$$

$$\bar F(\omega) = F_0(\omega) \cdot \bar D(\omega) \leftarrow$$ Discretización en la frecuencia



Pues hay que aplicar la propiedad de Fourier de $f_1 \circledast f_2(x) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} F_1(\omega)\ F_2(\omega)$

$f_1(x) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} F_1(\omega)$

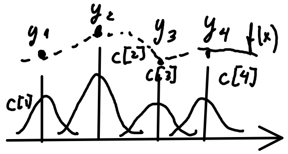
$f_2(x) \overset{\mathcal{F}}{\leftrightarrow} F_2(\omega)$

1.8 Representación de señales análogas mediante imágenes digitales

1.8.1 Espacios invariantes a la traslación entera

Tenemos un espacio generado por la traslación y el escalamiento de una función ϕ

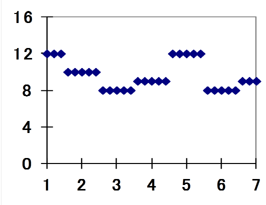
$$f(x) = \sum_{l\in\mathbb{Z}} c_l \; \phi(x-l)$$



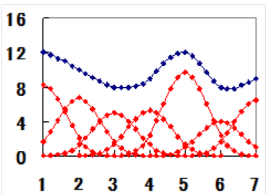
Al tener valores discretos y[k], se puede interpolar estos valores mediante la relación $\vec{y} = \Phi\vec{c}$

Por ejemplo, se pueden utilizar funciones rectangulares, triangulares, splines cúbicos o wavelets:

Rectángulo:



Spline cúbico



1.8.2 Cálculo de B-splines

Propiedades generales

$$\int_{x\in\mathbf{R}} \beta^n(x-\ell) = 1$$

$$\beta^n \in C^{n-2}(\mathbf{R})$$

$$\partial\beta^n/\partial x = \beta^{n-1}(x+\tfrac{1}{2}) - \beta^{n-1}(x-\tfrac{1}{2})$$

Propiedades de aproximación

Partición de la unidad

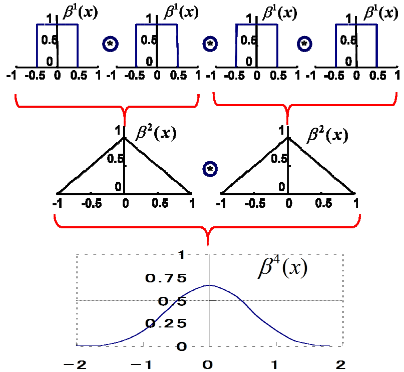
$$\sum_{\ell=\mathbf{Z}} \beta(x-\ell) = 1, \quad \forall x \in \mathbf{R}$$

$$\Downarrow$$

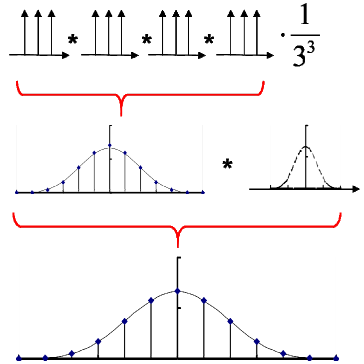
$$Error\,(f,\tilde{f}) \propto \kappa_\varphi \cdot T^L,$$

con $T \to 0$

T: intervalo de muestreo, L: potencia de aprox

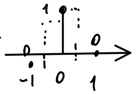


$$\beta^4(x) = (\beta^1 \circledast \beta^1 \circledast \beta^1 \circledast \beta^1)(x)$$



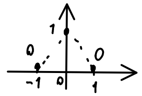
$$b_m^4[k] = \tfrac{1}{m^3}\left(b_m^1 * b_m^1 * b_m^1 * b_m^1\right) * b_1^4[k]$$

$$\beta^1(x) = \begin{cases} 1, & |x| < \frac{1}{2} \\ 0, & \sim \end{cases} \in C^{-1}$$



$$b_m^1[k] = \begin{cases} 1, & 0 \le k < m \\ 0 & \sim \end{cases}$$

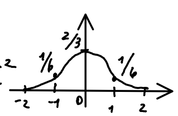
$$\beta^2(x) = \beta^1 \circledast \beta^1(x) = \begin{cases} 1-|x|, & |x| \le 1 \\ 0, & \sim \end{cases} \in C^0$$



$$b_m^n[k] = \beta^n(x/m)\Big|_{x=k}$$

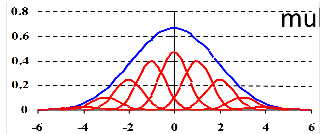
$$k \in \mathbb{Z},\ m \in \mathbb{Z}$$

$$\beta^4(x) = \begin{cases} \frac{2}{3} - x^2 + \frac{1}{2}|x|^3, & |x| < 1 \\ \frac{1}{6}(2-|x|)^3, & 1 \le |x| < 2 \\ 0, & |x| \ge 2 \end{cases} \in C^2$$



$$\underbrace{\frac{1}{m^{(n-1)}} \overbrace{b_m^1 * b_m^1 * \cdots * b_m^1}^{n \text{ veces}} * b_m^1[k]}$$

multiresolución



$$\beta_m^n(x) = \beta^n\left(\tfrac{x}{m}\right) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} u_m^n[k]\, \beta^n(x-k)$$

1.8.3 Ejemplo de wavelets con B-spline

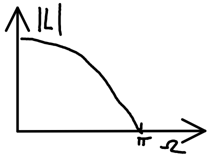
La descomposición por wavelets se basa en filtros pasa-bajos y filtros pasa-altos que se aplican en forma progresiva y que se basan en funciones de soporte local

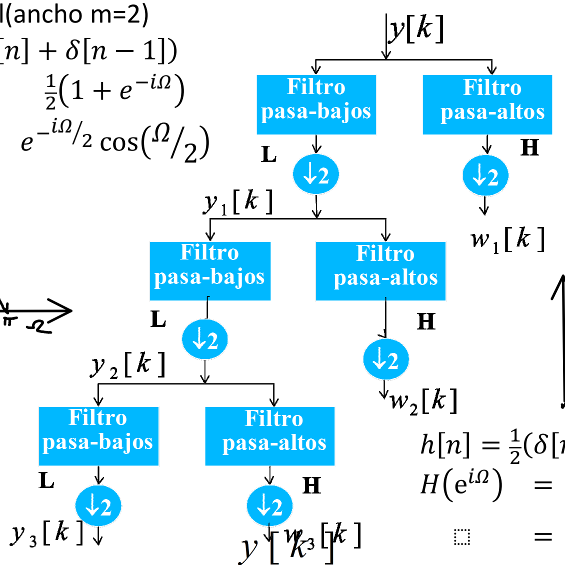
Ejemplo Haar Wavelet
media móvil(ancho m=2)

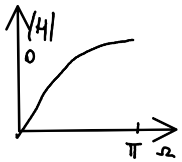
$\mathcal{L}[n] = \frac{1}{2}(\delta[n] + \delta[n-1])$

$L(e^{i\Omega}) \;=\; \frac{1}{2}(1 + e^{-i\Omega})$

$\;=\; e^{-i\Omega/2}\cos(\Omega/2)$



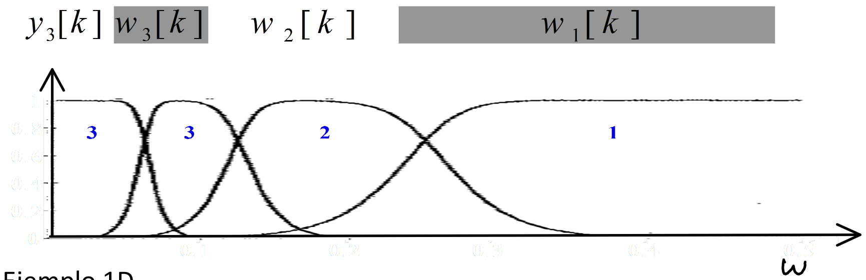




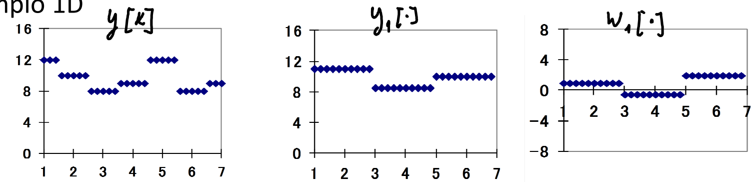
$h[n] = \frac{1}{2}(\delta[n] - \delta[n-1])$

$H(e^{i\Omega}) \;=\; \frac{1}{2}(1 - e^{-i\Omega})$

$\;=\; -ie^{-i\Omega/2}\sin(\Omega/2)$

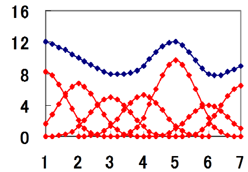


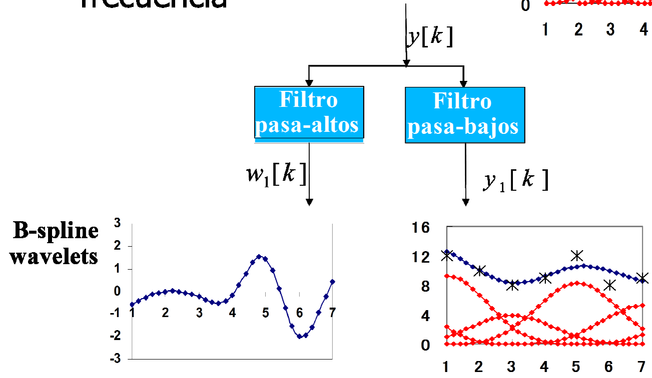
Ejemplo 1D



1.8.4 Ejemplo Wavelet con B-spline de orden mayor

- Decomposición en diferentes canales de frecuencia





Ejemplo 2D Haar Wavelet:

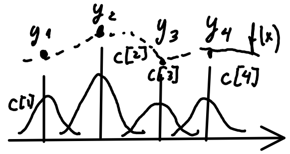
(a) (b)

1.8 Representación de señales análogas mediante imágenes digitales

1.8.1 Espacios invariantes a la traslación entera

Tenemos un espacio generado por la traslación y el escalamiento de una función ϕ

$$f(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c[l]\phi(x-l)$$



Al tener valores discretos y[k], se puede interpolar estos valores mediante la relación $\vec{y} = \Phi\vec{c}$

$$y[k] = f(x)\Big|_{x=k}, \; k \in \mathbb{Z} \Rightarrow y[k] = \sum_{l \in \mathbb{Z}} c[l]\phi(k-l)$$

Sea $p[l] = \phi(l), \; l \in \mathbb{Z} \Rightarrow y[k] = c * p[k]$

$$c[l] = (p^{-1}) * y[l]$$

Si queremos encontrar el kernel (función base) que interpola los valores y[k], podemos expresarlo en términos del espacio generado por la traslación de la función ϕ

$$\eta(x) = \sum q[l]\,\phi(x-l) \qquad l \in \mathbb{Z}$$

Para que sea una función interpoladora $\eta(x)\Big|_{x=k} = \delta[k]$

Por lo tanto $q[k] = (p^{-1})[k]$

y la func. cardinal $\eta(x) = \sum_{l \in \mathbb{Z}} (p^{-1})[l]\,\phi(x-l)$

$$\underbrace{(p^{-1})}_{q} * p[k] = \delta[k]$$